

C. L. SIEGEL IN GÖTTINGEN

ZU DEN BEWEISEN
DES VORBEREITUNGSSATZES
VON WEIERSTRASS

Ich stamme noch aus dem großen neunzehnten Jahrhundert und hatte dann das weitere Glück, während meiner Studienzeit in Berlin und Göttingen durch hervorragende Persönlichkeiten in der damals lebendigen Tradition aus der Glanzzeit der Mathematik erzogen zu werden. Von diesen akademischen Lehrern hat mich besonders Edmund Landau beeinflußt, dessen Sorgfalt in der Vorbereitung von Vorlesungen und schriftlichen Veröffentlichungen mir dauernd ein unerreichtes Vorbild geblieben ist. „Er war der pflichttreueste von uns allen“ sagte Hilbert zu mir, als ich 1938 die Nachricht vom Tode Landaus überbrachte. Jetzt, 30 Jahre später, seien die folgenden Zeilen seinem Andenken gewidmet.

Der Vorbereitungssatz von Weierstraß entstand aus der Frage nach den Nullstellen von analytischen Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Es sei $F(y, x_1, \dots, x_n)$ eine Potenzreihe in den $n + 1$ Variablen $y, x_1, \dots, x_n$ mit komplexen Koeffizienten, die in einer Umgebung des Nullpunktes $y = 0, x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ konvergiert. Aus einem bald ersichtlichen Grunde haben wir dabei eine der Variablen ausgezeichnet und y genannt. Es sollen dann sämtliche Lösungen der Gleichung $F = 0$ betrachtet werden, welche in einer hinreichend klein gewählten Umgebung des Nullpunktes gelegen sind. Wir wollen die trivialen Fälle ausschließen, daß entweder die Reihe F identisch 0 ist oder aber mit einer von 0 verschiedenen Konstanten anfängt. Es beginnt dann also F mit Gliedern einer gewissen positiven Ordnung r , und wir können nach einer geeigneten umkehrbaren homogenen linearen Transformation der $n + 1$ Variablen annehmen, daß in F das Glied y^r auftritt. Wir fassen nun die sämtlichen Glieder r -ter Ordnung zusammen und können also

$$F = F_r + G_r, \quad F_r = y^r + P_1 y^{r-1} + \dots + P_r,$$

setzen, wobei G_r die sämtlichen Glieder höherer Ordnung aufnimmt und $P_1, \dots, P_r$ homogene Polynome der n Variablen $x_1, \dots, x_n$ von den Graden $1, \dots, r$ bedeuten.

Zunächst wollen wir den einfachen Fall betrachten, daß der Rest G_r identisch 0 ist. Bei jeder beliebigen Wahl der n Variablen $x_1, \dots, x_r$ ist dann $F = 0$ eine algebraische Gleichung r -ten Grades für die Unbekannte y und hat daher nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau r Lösungen $y = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, die aber nicht alle verschieden

zu sein brauchen. Da ferner die Koeffizienten $P_1, \dots, P_r$ für $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ sämtlich verschwinden, kann man zu beliebig vorgegebenem positiven ϱ stets einen positiven Radius σ derart bestimmen, daß für $|x_1| < \sigma, \dots, |x_n| < \sigma$ die r Wurzeln $\eta_1, \dots, \eta_r$ alle im Kreise $|y| < \varrho$ liegen.

Nun gehen wir zum allgemeinen Fall über, wobei wir uns wegen des Auftretens von G_r von vornherein auf genügend kleine absolute Beträge der $n + 1$ Variablen beschränken müssen. Man wird vermuten, daß dann das vorangehende Resultat bestehen bleibt, daß es also bei hinreichend kleinem ε zu beliebigem positiven $\varrho < \varepsilon$ eine positive Zahl $\sigma < \varepsilon$ gibt, für welche bei beliebiger Wahl von $x_1, \dots, x_n$ im Kreise $|x| < \sigma$ die Gleichung $F = 0$ im Kreise $|y| < \varrho$ genau r Wurzeln $y = \eta_1, \dots, \eta_r$ besitzt. Dies ist in der Tat richtig und wurde von Cauchy 1831 im Falle $n = 1$ bewiesen, sodann 1879 allgemein von Poincaré [1]. Beim Beweise benutzt Poincaré die von Cauchy eingeführten Methoden und insbesondere den Residuensatz. Ferner bemerkt Poincaré, daß die elementaren symmetrischen Polynome von $\eta_1, \dots, \eta_r$ bei veränderlichen Werten der n Parameter $x_1, \dots, x_n$ konvergente Potenzreihen werden, daß also das Produkt

$$\Phi = (y - \eta_1)(y - \eta_2) \cdots (y - \eta_r) = y^r + Q_1 y^{r-1} + \cdots + Q_r$$

ist, worin sich die Koeffizienten $Q_1, \dots, Q_r$ als Potenzreihen in $x_1, \dots, x_n$ ergeben.

In jeder genügend kleinen Umgebung des Nullpunktes im Raume der $n + 1$ unabhängigen komplexen Variablen $y, x_1, \dots, x_n$ stimmen die Lösungen der Gleichung $F = 0$ mit denen der Gleichung $\Phi = 0$ überein. Dieses zusammenfassende Ergebnis von Poincaré ist nun aber eine unmittelbare Folgerung aus dem weitergehenden Satz von Weierstraß, nämlich dem sogenannten Vorbereitungssatz. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz besteht in folgender Identität:

$$F = \Phi E, \quad E = 1 + \cdots;$$

dabei ist E eine mit dem konstanten Gliede 1 beginnende Potenzreihe in den $n + 1$ unabhängigen Variablen $y, x_1, \dots, x_n$, welche in einer genügend kleinen Umgebung des Nullpunktes $y = 0, x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ konvergiert, während Φ die obige Bedeutung hat und also ein Polynom bezüglich y ist. Aus dieser Identität folgt tatsächlich sofort, daß in hinreichender Nähe des Nullpunktes die Nullstellen von F genau mit denen von Φ übereinstimmen.

Weierstraß [2] hat seinen Vorbereitungssatz zuerst 1886 im Druck veröffentlicht und gibt dabei an, daß er ihn bereits seit 1860 in seinen Vorlesungen mitgeteilt hätte. Bekanntlich hat Weierstraß bei seinen Publikationen nach Möglichkeit vermieden, von der Cauchyschen Integralformel und den daran anschließenden Methoden Gebrauch zu machen, und so ist es von Interesse, seinen Beweis zu betrachten. Das wollen wir jetzt tun und dann zum Vergleich spätere Beweise anderer Mathematiker besprechen.

Bei dem von Weierstraß angegebenen Beweis ist es wesentlich, die Variable y zunächst auf einen kleinen Kreisring $\varrho^* < |y| < \varrho$ zu beschränken, wobei wir der Einfachheit halber noch $\varrho^* = \frac{\varrho}{2}$ wählen können. Setzt man

$$v = \frac{P_1}{y} + \frac{P_2}{y^2} + \dots + \frac{P_r}{y^r}, \quad F_r = y^r(1 + v),$$

so kann man dann noch bei beliebigem ϱ den Radius σ so klein festlegen, daß für $|x_1| < \sigma, \dots, |x_r| < \sigma$ die Größe $|v| < \frac{1}{2}$ und folglich $|F_r - y^r| < \frac{1}{2}|y|^r$ wird. Da ferner der Rest G_r nur Glieder von höherer als r -ter Ordnung enthält, wird bei genügend kleinem ϱ und geeignetem σ in dem Gebiete $\frac{\varrho}{2} < |y| < \varrho, |x_1| < \sigma, \dots, |x_n| < \sigma$ auch $|G_r| < \frac{1}{2}|y|^r$ werden. Setzt man dann

$$F = y^r(1 + w),$$

so ist also

$$w = v + G_r y^{-r}, \quad |w| < 1, \quad F \neq 0$$

und $F - y^r = y^r w$ eine konvergente Potenzreihe in den $n + 1$ Variablen $y, x_1, \dots, x_n$. Zunächst seien nun $x_1, \dots, x_n$ festgehalten, so daß F eine Potenzreihe in y allein wird. Deutet man durch einen Strich die Differentiation nach y an, so wird im Kreisring die logarithmische Ableitung

$$\frac{F'}{F} = \frac{r}{y} + \frac{w'}{1+w}, \quad \frac{w'}{1+w} = w' - w'w + w'w^2 - \dots = \left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots \right)'.$$

Hierbei ist zu beachten, daß w und die Potenzen $w^2, w^3, \dots$ Laurentsche Reihen in y sind, in denen übrigens jeweils nur endlich viele negative Potenzen von y auftreten.

Nach dem Doppelreihensatz ist dann auch $\frac{w'}{1+w}$ eine konvergente Laurentsche Reihe, und zwar tritt in dieser die Potenz y^{-1} nicht auf. Andererseits hat F als reguläre analytische Funktion von y im abgeschlossenen Kreis $|y| \leq \frac{\varrho}{2}$ nur endlich viele Null-

stellen, die jetzt mit $\eta_1, \dots, \eta_h$ bezeichnet seien. Im Kreisring $\frac{\varrho}{2} < |y| < \varrho$ gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{F'}{F} - \left(\frac{1}{y - \eta_1} + \frac{1}{y - \eta_2} + \dots + \frac{1}{y - \eta_h} \right) &= \frac{r - h}{y} + \frac{w'}{1 + w} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_1^k + \eta_2^k + \dots + \eta_h^k}{y^{k+1}}, \end{aligned}$$

worin nun aber links eine im gesamten Kreis $|y| < \varrho$ reguläre Funktion auftritt. Die linke Seite kann man daher in eine Reihe nach nicht-negativen Potenzen von y entwickeln, während rechts eine Laurentsche Reihe steht.

Da für Laurentsche Reihen wie bei gewöhnlichen Potenzreihen der Eindeutigkeitsatz gilt, dürfen also rechts keine negativen Potenzen von y vorkommen, woraus zunächst $h = r$ folgt. Weiter ergibt sich aber jede Potenzsumme

$\eta_1^k + \dots + \eta_r^k$ ($k = 1, 2, \dots$) als der Koeffizient von y^{-k-1} in der Reihe für $\frac{w'}{1+w}$.

Geht man jetzt auf die Abhängigkeit von $x_1, \dots, x_n$ zurück und macht diese Parameter wieder im Kreis $|x| < \sigma$ variabel, so erweisen sich jene Koeffizienten sämtlich als konvergente Potenzreihen in $x_1, \dots, x_n$. Also sind auch die elementaren symmetrischen Polynome der r Wurzeln $\eta_1, \dots, \eta_r$ konvergente Potenzreihen in $x_1, \dots, x_n$, womit das Ergebnis von Poincaré bewiesen ist. Schließlich ist noch die logarithmische

Ableitung von $\frac{F}{\Phi}$, nämlich die Differenz $\frac{F'}{F} - \frac{\Phi'}{\Phi}$, eine Reihe nach nicht-negativen

Potenzen aller Variablen, welche dann als Ableitung A' einer Reihe A ohne konstantes

Glied angesetzt werden kann. Für $e^A = E$ wird $A' = \frac{E'}{E}$ und durch Integration

$F = \Phi E$, womit die Aussage des Vorbereitungssatzes gewonnen ist. Allerdings kommt bei der Integration zunächst ein von y unabhängiger Faktor hinzu, über dessen Bestimmung Weierstraß keine genaue Angabe macht, und hierfür wäre eine sorgfältige Überlegung nötig, wenn man mit Weierstraß die logarithmische Funktion ganz umgehen will. Es ist ferner vom prinzipiellen Standpunkt aus einzuwenden, daß beim Beweis des Eindeutigkeitsatzes der Laurentschen Entwicklung die Cauchyschen Ideen nicht zu vermeiden sind.

Im Jahre 1927 hat Wirtinger [3] den von Weierstraß gegebenen Beweis erheblich vereinfacht, indem er die Wurzeln $\eta_1, \dots, \eta_r$ vollkommen eliminiert und insbesondere von ihrer Existenz keinen Gebrauch macht; allerdings scheute er sich nicht, den Logarithmus explizit einzuführen. In der oben benutzten Formel $F = y^r(1 + w)$ setzt er $1 + w = e^{\log(1+w)}$ und bildet die Laurentsche Reihe

$$\log(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots = A + B,$$

worin B die sämtlichen Glieder mit negativen Exponenten von y zusammenfaßt, während A eine gewöhnliche Potenzreihe in y wird. Es folgt

$$Fe^{-A} = y^r e^B, \quad F(1 - A + \dots) = y^r(1 + B + \dots).$$

Links erhält man offenbar eine gewöhnliche Potenzreihe in y , dagegen rechts eine mit y^r beginnende Reihe nach fallenden Potenzen von y . Wegen der Eindeutigkeit

der Laurentschen Entwicklung im Kreisring $\frac{\varrho}{2} < |y| < \varrho$ muß dann aber rechts ein Polynom Φ in y stehen, dessen Koeffizienten sich als konvergente Potenzreihen in $x_1, \dots, x_n$ erweisen. Setzt man wieder $e^A = E$, so ergibt sich der Vorbereitungssatz.

Wirtinger hat nicht bemerkt, daß Stickelberger [4] schon 1887 im wesentlichen denselben eleganten Beweis veröffentlicht hat. Dieser Beweis war inzwischen auch von Hartogs [5] im Jahre 1909 wiederentdeckt worden.

Im Jahre 1929 gab Späth [6] einen Beweis des Vorbereitungssatzes, der insofern axiomatisch etwas Neues zu bieten schien, als er nur Hilfsmittel aus der lokalen Theorie der Potenzreihen benötigte. Späth behandelt dabei sogleich eine Verallgemeinerung des Vorbereitungssatzes, für welche neuerdings der Name Divisionssatz vorgeschlagen wurde. Dieser Satz besagt, daß für jede konvergente Potenzreihe L in den $n + 1$ Variablen $y, x_1, \dots, x_r$ mit der obigen Bedeutung von F die Formel

$$L = FQ + R$$

besteht, wobei Q und R wiederum konvergente Potenzreihen sind, von denen aber R die Variable y höchstens bis zur Potenz y^{r-1} enthält. Wählt man speziell $L = y^r$ und setzt $L - R = \Phi$, $Q^{-1} = E$, so bekommt man die Aussage des Vorbereitungssatzes. Umgekehrt läßt sich aber wiederum der Divisionssatz durch einen naheliegenden einfachen Schluß aus dem Vorbereitungssatz ableiten, und zwar findet ein aufmerksamer Leser dies bereits in Stickelbergers Arbeit aus dem Jahre 1887, was anscheinend bisher übersehen worden ist.

Späth beweist den Divisionssatz, indem er Q und R als Potenzreihen in $y, x_1, \dots, x_n$ mit unbekannten Koeffizienten ansetzt und diese dann in geeigneter Reihenfolge durch Koeffizientenvergleich rekursiv bestimmt, worauf die Konvergenz mit der Cauchyschen Majorantenmethode gezeigt wird. Der von Späth gegebene Beweis, soweit er sich auf den Vorbereitungssatz bezieht, ist nun aber ebenfalls mehrere Jahrzehnte früher bekannt gewesen. In einer kürzlich erschienenen Festschrift zum 150. Geburtstag von Weierstraß bemerkt Henri Cartan [7], daß bereits Brill [8] 1910 denselben Beweis mittels Koeffizientenvergleich und Majorantenmethode ausgeführt hat, und weist sodann darauf hin, daß schon vorher 1905 durch Lasker [9] die gleiche Idee ohne nähere Einzelheiten skizziert worden war, während aber Lasker nicht von Brill erwähnt wird. Tatsächlich war nun aber schon im Jahre 1891 dieselbe Beweisskizze für $n = 1$ durch Brill [10] angegeben worden, was nun wiederum von Lasker nicht zitiert wurde. Damals erklärte Brill außerdem, der Satz sei ihm schon einige Zeit bekannt gewesen und er verzichte aber nach den Publikationen von Weierstraß und Stickelberger auf eine Ausführung seines eigenen Beweises.

Einige gegenwärtige Verfasser bezeichnen übrigens den Divisionssatz als Weierstraßschen Vorbereitungssatz, was natürlich historisch und sachlich nicht berechtigt

ist, aber so geschieht es unter anderem in der unlängst herausgekommenen Funktionentheorie von Hörmander [11] und dem Abhyankarschen Buche mit dem irreführenden Titel „Local analytic geometry“. Ich sage „irreführend“; denn zum mindesten seit 1797 haben die bisherigen Mathematiker unter analytischer Geometrie etwas ganz Bestimmtes verstanden, was eben dem Genius von Descartes zu verdanken ist, und es ist ein grober Unfug, das jetzt ändern zu wollen. Die schöpferischen Mathematiker früherer Generationen sind in der Wahl von Bezeichnungen meist sehr behutsam vorgegangen, wie etwa Gauß bei der Einführung des Kongruenzbegriffes in die Zahlentheorie oder Dedekind bei der Erklärung eines Körpers in der Algebra. Dagegen vergeifen sich moderne Epigonen an Begriffen, Denkweisen und Formelzeichen, welche durch Jahrzehnte und Jahrhunderte für Lehre und Forschung von Nutzen gewesen sind, und ertränken uns dafür mit einer Sintflut von komischen Merkbildern, sprachwidrigen Abkürzungen und absurden Zauberworten. Der Nachwuchs wird überhaupt nicht mehr imstande sein, etwa in Riemanns oder Hilberts Werken zu lesen, wenn er nur auf exakte Sequenzen und kommutative Diagramme dressiert ist. Der gegenwärtige bedrohliche Zustand in der Mathematik erinnert durchaus an die Zeiten des Nationalsozialismus unter Hitler, als solange marschiert wurde, bis alles in Scherben fiel. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß in ebenfalls irreführender Weise in dem Abhyankarschen Buche [12] als ursprünglich von Weierstraß gegebener Beweis des Vorbereitungssatzes ein Gedankengang vorgeführt wird, welcher in den bekannten Lehrbüchern von Picard, Goursat und Osgood zu finden ist und sehr wenig mit Weierstraß zu tun hat. Diese Beweisführung benutzt nämlich gerade die Cauchyschen Methoden der Funktionentheorie, im Gegensatz zur Einstellung von Weierstraß.

Nach dieser langen Einleitung komme ich endlich zum eigentlichen Gegenstand meiner Veröffentlichung. Es ist behauptet worden, der sogenannte Späthsche Beweis des Vorbereitungssatzes sei den anderen Beweisen dadurch überlegen, daß er nur lokale Eigenschaften von Potenzreihen verwendet und deswegen auch auf den Fall übertragen werden kann, in welchem die Koeffizienten der Potenzreihe F einem nicht-archimedisch bewerteten Körper angehören. Es ist zuzugeben, daß der Stickelbergersche Beweis in der oben angegebenen Form von der Eindeutigkeit der Laurentschen Entwicklung Gebrauch macht, welche nicht durch rein lokale Untersuchung von Potenzreihen bewiesen werden kann. Ich werde aber jetzt auseinandersetzen, wie man durch eine naheliegende und höchst einfache Änderung des Stickelbergerschen Ansatzes erreichen kann, daß man mit lokalen Betrachtungen auskommt und dann auch die Übertragung auf andere Bewertungen ausführen kann, wenn man daran überhaupt interessiert sein sollte.

Wir machen die Substitutionen $x_k = yz_k$ ($k = 1, \dots, n$) und führen dadurch anstelle von $y, x_1, \dots, x_n$ die neuen unabhängigen Variablen $y, z_1, \dots, z_n$ ein. In der Gleichung

$F = y^r(1 + w)$ erhalten wir für w eine gewöhnliche Potenzreihe in $y, z_1, \dots, z_n$, welche sicherlich im Bereich $|y| < \varrho, |z_k| < \frac{\sigma}{\varrho}$ ($k = 1, \dots, n$) konvergiert und kein konstantes Glied hat. Es wird dann auch der Ausdruck

$$\log(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \dots$$

eine konvergente Potenzreihe in $y, z_1, \dots, z_n$ ohne konstantes Glied. Für jeden Summanden $cy^k z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ bilden wir den Wert

$$k - (k_1 + \dots + k_n) = l,$$

den wir als Gewicht dieses Reihengliedes bezeichnen wollen. Es ist dabei klar, daß das Gewicht des Produktes zweier Reihenglieder gleich der Summe ihrer einzelnen Gewichte ist und daß durch Angabe der Exponenten $k_1, \dots, k_n$ zusammen mit l auch wiederum der Exponent $k = l + (k_1 + \dots + k_n)$ festgelegt wird. Wir zerlegen nun

$$\log(1 + w) = A + B,$$

wobei B genau alle Glieder negativen Gewichts $l = -1, -2, \dots$ umfaßt und A die Glieder mit $l = 0, 1, \dots$. Für die betreffenden gewöhnlichen Potenzreihen in den Variablen $y, z_1, \dots, z_n$ gilt dann wieder die Identität

$$F e^{-A} = y^r e^B$$

mit $e^{-A} = 1 - A + \dots$, $e^B = 1 + B + \dots$.

Ist nun $cy^l x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ ein Glied von F in den alten Variablen, so geht es durch die Substitution in $cy^k z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ über und hat dann also das nicht-negative Gewicht l . Daher bekommt man auf der linken Seite der Identität kein Glied negativen Gewichts. Auf der rechten Seite sind aber alle auftretenden Gewichte $\leq r$ und genauer $< r$ mit Ausnahme des einzigen Gliedes y^r selbst. Also können überhaupt nur die Gewichte 0 bis r wirklich auftreten und liefern beim Übergang zu den alten Variablen $y, x_1, \dots, x_n$ die gesuchte Potenzreihe Φ . Da außerdem absolute Konvergenz für $y = \frac{\varrho}{2}, z_k = \frac{\sigma}{\varrho}, x_k = \frac{\sigma}{2}$ ($k = 1, \dots, n$) vorliegt, so auch für $|y| < \frac{\varrho}{2}, |x_k| < \frac{\sigma}{2}$, womit alles bewiesen ist.

Es ist klar, daß in der neuen Fassung des Beweises der Eindeutigkeitssatz nur für gewöhnliche Potenzreihen und nicht mehr für die Laurentsche Entwicklung benötigt wird. Ferner ergeben sich A, B, Φ und auch $e^A = 1 + A + \dots = E$ durch sehr einfaches Rechnen mit Potenzreihen, während der Brill-Lasker-Späthsche Koeffizientenvergleich zu einer etwas mühsameren Rekursion führt, die auch in der abgeänderten Darstellung bei Abhyankar, Cartan und Kneser [13] noch nicht so ganz befriedigen

wird. Da außerdem der Konvergenzbeweis völlig evident ist, scheint mir der 80 Jahre alte Stickelbergersche Beweis auch heute noch der kürzeste, durchsichtigste und zweckmäßigste zu sein.

Literatur

- [1] H. Poincaré, Oeuvres **1**, LIII—LVIII.
- [2] K. Weierstrass, Mathematische Werke **2**, 135—142.
- [3] W. Wirtinger, Über den Weierstrass'schen Vorbereitungssatz, J. reine angew. Math. **158** (1927), 260—267.
- [4] L. Stickelberger, Ueber einen Satz des Herrn Noether, Math. Ann. **30** (1887), 401—409.
- [5] F. Hartogs, Über die elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes“, Bayer. Akad. Wiss. Math.-Naturw. Kl. S.—B. 1909, Nr. 3, 12 S.
- [6] H. Späth, Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz, J. reine angew. Math. **161** (1929), 95—100.
- [7] H. Cartan, Sur le théorème de préparation de Weierstraß, Festschr. zur Gedächtnisfeier für K. Weierstraß (1966), 155—168.
- [8] A. Brill, Über den Weierstraßschen Vorbereitungssatz, Math. Ann. **69** (1910), 538—549.
- [9] E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Ann. **60** (1905), 20—116, insbes. 89.
- [10] A. Brill, Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle, Bayer. Akad. Wiss. Math.-Naturw. Kl. S.—B. 1891, 207—220.
- [11] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, D. van Nostrand Comp., Inc., Princeton (N. Y.) 1966, 144.
- [12] S. S. Abhyankar, Local analytic geometry, Academic Press, New York 1964, 100—105.
- [13] H. Kneser, Funktionentheorie, 2. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1966, 127 bis 130.