

EINIGE AUF DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNCTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHEN SICH BEZIEHENDE SÄTZE.

1. Vorbereitungssatz.*)

Ist $F(x, x_1, \dots x_n)$ eine gegebene, in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellte Function von $x, x_1, \dots x_n$, welche, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, ebenfalls gleich Null wird, so giebt es stets unendlich viele, dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsysteme der Grössen $x, x_1, \dots x_n$, welche die Gleichung

$$F(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

befriedigen.

Bei vielen Untersuchungen handelt es sich nun darum, von diesen Werthsystemen alle diejenigen zu bestimmen, für welche der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse eine — beliebig klein anzunehmende — Grenze δ nicht überschreitet.

Diese Aufgabe lässt sich folgendermassen lösen.

Es werde

$$F(x, 0, \dots 0) \text{ mit } F_0(x)$$

bezeichnet und

$$F(x, x_1, \dots x_n) = F_0(x) - F_1(x, x_1, \dots x_n)$$

gesetzt, so dass F_1 für jeden Werth von x gleich Null wird, wenn $x_1, \dots x_n$

*) Diesen Satz habe ich seit dem Jahre 1860 wiederholt in meinen Universitäts-Vorlesungen vorgetragen.

sämmtlich verschwinden. Ich nehme nun zunächst an, dass $F_0(x)$ nicht für jeden Werth von x verschwinde. Dann kann man eine positive Grösse ϱ so annehmen, dass $F_0(x)$ für keinen Werth von x , dessen absoluter Betrag > 0 , aber $\leq \varrho$ ist, verschwindet, und dass es zugleich Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$, die sämmtlich von Null verschieden sind, giebt, für welche die Reihe $F_1(\varrho, x_1, \dots x_n)$ convergirt. Wenn ferner eine zweite positive Grösse ϱ_0 so angenommen wird, dass sie > 0 , aber $< \varrho$ ist, und festgesetzt wird, dass der absolute Betrag von x zwischen ϱ_0 und ϱ liege, die absoluten Beträge von $x_1, \dots x_n$ aber alle unter einer Grenze ϱ_1 bleiben sollen, so kann man ϱ_1 so klein annehmen, dass für alle Werthsysteme von $x, x_1, \dots x_n$, welche diese Bedingungen erfüllen, F_0 dem absoluten Betrage nach grösser als F_1 ist. Man hat dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x, x_1, \dots x_n)} &= \frac{1}{F_0} + \frac{F_1}{F_0^2} + \frac{F_1^2}{F_0^3} + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{F_1^\lambda}{F_0^{\lambda+1}} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{dF_0}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{F_1^\lambda}{F_0^{\lambda+1}} \frac{dF_0}{dx} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{F_1^{\lambda-1}}{F_0^\lambda} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ &= \frac{dF_0}{dx} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} \right). \end{aligned}$$

Es ist aber, da der grösste Werth, welchen der absolute Betrag von $\frac{F_1}{F_0}$ für alle jetzt betrachteten Werthe von $x, x_1, \dots x_n$ besitzt, kleiner als 1 ist, die Reihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} \right)$$

gleichmässig convergent, und daher

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF_0}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}.$$

Es kann ferner, wenn das Anfangsglied in der Entwicklung von $F_0(x)$ den Exponenten m hat, $\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$ in eine Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G(x_1, \dots x_n)_{\lambda, \mu} x^{-m\lambda+\mu}$$

entwickelt werden, wo $G(x_1, \dots x_n)_{\lambda, u}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ bedeutet; und bei der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$$

kann man alle Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in eines zusammenziehen und erhält so:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} = \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} G(x_1, \dots x_n)_v x^v,$$

wo auch $G(x_1, \dots x_n)_v$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{\frac{dF_0}{dx}}{F_0} = mx^{-1} + G(x),$$

wo $G(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x bedeutet. Also:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = mx^{-1} + G(x) - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} G(x_1, \dots x_n)_v x^v.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich zunächst erschen, dass, wenn man den Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ bestimmte Werthe, die dem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als ϱ_1 sind, beilegt, die Gleichung

$$F(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

stets durch m Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind, befriedigt wird, vorausgesetzt, dass jeder so oft gezählt wird als die zugehörige Ordnungszahl anzeigt. (Vgl. S. 86.)

Dass es überhaupt innerhalb des angegebenen Bereiches Werthe von x giebt, welche $F = 0$ machen, lässt sich so zeigen: Angenommen, es würde $F(x, x_1, \dots x_n)$ bei gegebenen Werthen von $x_1, \dots x_n$ für keinen der in Rede stehenden Werthe von x gleich Null, so liesse sich $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$ für alle Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind, in eine nur ganze positive Potenzen von x enthaltende Reihe entwickeln, und diese müsste für die ihrem absoluten Betrage nach zwischen ϱ_0 und ϱ liegenden Werthe von x mit der vorstehenden übereinstimmen. Dies ist aber nicht möglich,

da in der letzteren Reihe das Glied mx^{-1} vorkommt. (Da die erste Ableitung einer Potenzreihe von x niemals ein Glied mit dem Exponenten -1 enthält, so kann sich das angegebene Glied nicht gegen ein anderes heben.) — Angenommen nun, es seien

$$x', x'', \dots x^{(r)}$$

die in dem angegebenen Bereiche liegenden Werthe von x , welche die Gleichung $F(x, x_1, \dots x_n) = 0$ befriedigen, wobei ein jeder in diese Reihe so oft aufzunehmen ist, als seine Ordnungszahl anzeigt, so wird die Differenz

$$\frac{1}{F'} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{x-x'} - \dots - \frac{1}{x-x^{(r)}}$$

für keinen Werth von x , dessen absoluter Betrag kleiner als ϱ ist, unendlich gross, und kann daher in eine nur ganze positive Potenzen von x enthaltende Reihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickelt werden. Für alle Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ , aber grösser als jede der Grössen $x', x'', \dots x^{(r)}$ und ϱ_0 sind, hat man also:

$$\frac{1}{F'} \frac{\partial F}{\partial x} = \mathfrak{P}(x) + \sum_{v=0}^{v=\infty} s_v x^{-v-1},$$

wo

$$s_v = (x')^v + \dots + (x^{(r)})^v,$$

und

$$\frac{1}{F'} \frac{\partial F}{\partial x} = mx^{-1} + G(x) - \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} G(x_1, \dots x_n)_v \cdot vx^{v-1}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke von $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F'}$ giebt

$$s_0 = m \text{ oder } r = m,$$

d. h. die Anzahl der in Rede stehenden, die Gleichung $F(x, x_1, \dots x_n) = 0$ befriedigenden Werthe von x ist gleich dem Grade des Anfangsgliedes von $F(x, 0, \dots 0)$.

Ferner ergibt sich, wenn man

$$v = -l \text{ und } l > 0 \text{ annimmt,}$$

$$s_l = lG(x_1, \dots x_n)_{-l}.$$

Setzt man daher:

$$f(x, x_1, \dots, x_n) = (x - x') \dots (x - x^{(m)}) = x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m,$$

so dass

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - x'} + \dots + \frac{1}{x - x^{(m)}}$$

ist, so erhält man für Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach grösser sind als $x', \dots, x^{(m)}$,

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)f_1 x^{m-2} + \dots + f_{m-1}}{x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m} = mx^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \dots,$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} f_1 &= -s_1 \\ 2f_2 &= -s_2 - s_1 f_1 \\ 3f_3 &= -s_3 - s_2 f_1 - s_1 f_2 \\ &\dots \dots \dots \\ mf_m &= -s_m - s_{m-1} f_1 - s_{m-2} f_2 - \dots - s_1 f_{m-1}. \end{aligned}$$

Hiernach sind $f_1, \dots, f_m$ sämtlich Potenzreihen von $x_1, \dots, x_n$, welche sicher convergiren, wenn alle diese Grössen dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ_1 sind. Die gesuchten m Werthe von x werden dann gefunden durch Auflösung der Gleichung

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m = 0.$$

Man erhält ferner durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$

$$\mathfrak{P}(x) = G(x) - \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) G(x_1, \dots, x_n)_{v+1} \cdot x^v$$

für alle Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind.

Setzt man daher

$$\mathfrak{G}(x, x_1, \dots, x_n) = \int_0^x G(x) dx - \sum_{v=0}^{\infty} G(x_1, \dots, x_n)_{v+1} x^{v+1},$$

$$\mathfrak{F}(x, x_1, \dots, x_n) = e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \dots, x_n)},$$

so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x, x_1, \dots, x_n$, welche sicher convergiren, wenn $|x| < \varrho, |x_1| < \varrho_1, \dots, |x_n| < \varrho_1$. Dabei wird $\mathfrak{F} = 1$, wenn $x, x_1, \dots, x_n$ sämtlich verschwinden.

wo die Grössen $c_{00}, \dots c_{nn}$ Constanten bezeichnen, die keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass

$$\begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n0} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$(c_{00}, c_{10}, \dots c_{n0})_{\mu}$$

von Null verschieden sein müssen. Durch diese Substitution verwandelt sich $F(x, x_1, \dots x_n)$ in eine ähnliche Function von $y, y_1, \dots y_n$, welche mit $\bar{F}(y, y_1, \dots y_n)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man:

$$\bar{F}(y, 0, \dots 0) = (c_{00}, c_{10}, \dots c_{n0})_{\mu} y^{\mu} + (c_{00}, c_{10}, \dots c_{n0})_{\mu+1} y^{\mu+1} + \dots$$

Es ist also die Function $\bar{F}(y, 0, \dots 0)$ nicht identisch gleich Null und ihr Anfangsglied von der μ^{ten} Ordnung.

Man kann daher nach dem Bewiesenen $\bar{F}(y, y_1, \dots y_n)$ darstellen in der Form

$$\bar{F}(y, y_1, \dots y_n) = (y^{\mu} + y^{\mu-1} \mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n) + \dots + \mathfrak{G}_{\mu}(y_1, \dots y_n)) \bar{\mathfrak{G}}(y, y_1, \dots y_n),$$

wo $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_{\mu}$ Potenzreihen von $y_1, \dots y_n$ bezeichnen, die sämtlich gleich Null werden, wenn diese Veränderlichen sämtlich verschwinden, während $\bar{\mathfrak{G}}(y, y_1, \dots y_n)$ eine Potenzreihe von $y, y_1, \dots y_n$ ist, welche einen von Null verschiedenen Werth erhält, wenn $y, y_1, \dots y_n$ sämtlich gleich Null gesetzt werden. Die letztere Reihe kann nun in eine ebenso beschaffene Potenzreihe von $x, x_1, \dots x_n$ verwandelt werden, die mit $\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man

$$F(x, x_1, \dots x_n) = (y^{\mu} + y^{\mu-1} \mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n) + \dots + \mathfrak{G}_{\mu}(y_1, \dots y_n)) \mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n).$$

Nun kann man δ so klein annehmen, dass für jedes Werthsystem der Grössen $x, x_1, \dots x_n$, in welchem jede einzelne dem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, erstens $\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$ einen von Null verschiedenen Werth erhält und zweitens das entsprechende Werthsystem der Grössen $y_1, \dots y_n$ dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirke der Reihen $\mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n), \dots \mathfrak{G}_{\mu}(y_1, \dots y_n)$ angehört. Hieraus ergibt sich Folgendes:

Wenn man zu jedem dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirke der Reihen $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Werthsysteme $y_1, \dots y_n$ die μ der Gleichung

$$y^\mu + y^{\mu-1} \mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n) + \dots + \mathfrak{G}_\mu(y_1, \dots y_n) = 0$$

genügenden Werthe von y bestimmt, und dann aus den so sich ergebenden Werthsystemen $y, y_1, \dots y_n$ die entsprechenden Werthsysteme $x, x_1, \dots x_n$ berechnet, so finden sich unter den letzteren alle diejenigen, welche die Gleichung $F(x, x_1, \dots x_n) = 0$ befriedigen und die Bedingung erfüllen, dass jede einzelne Grösse dem absoluten Betrage nach kleiner als die angegebene Grösse δ ist.

2.

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ ist durch eine andere $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar, wenn sich eine dritte Reihe $\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$ so bestimmen lässt, dass

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$$

ist.

Hat $\mathfrak{P}_0$ an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ einen von Null verschiedenen Werth, so existirt stets eine die vorstehende Gleichung befriedigende Reihe $\mathfrak{P}_2$; dagegen ist dies nicht der Fall, wenn $\mathfrak{P}_0(0, \dots 0) = 0$ ist, während $\mathfrak{P}_1(0, \dots 0)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es bleibt daher nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_0$ theilbar ist in dem Falle, wo

$$\mathfrak{P}_0(0, \dots 0), \quad \mathfrak{P}_1(0, \dots 0)$$

beide gleich Null sind.

Man führe (wie in Art. 1) an Stelle von $x_1, \dots x_n$ n andere Veränderliche $t_1, \dots t_n$ ein, indem man

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11} t_1 + \dots + g_{1n} t_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= g_{n1} t_1 + \dots + g_{nn} t_n \end{aligned}$$

setzt und die Constanten $g_{11}, g_{12}, \dots g_{nn}$ so wählt, dass erstens $x_1, \dots x_n$ von einander unabhängige Functionen der Grössen $t_1, \dots t_n$ sind, und zweitens weder $\mathfrak{P}_0(g_{11} t_1, \dots g_{n1} t_1)$ noch $\mathfrak{P}_1(g_{11} t_1, \dots g_{n1} t_1)$ für jeden Werth von t_1 verschwindet. Wenn dann die höchsten Potenzen von t_1 , durch welche diese

beiden Functionen von t_1 theilbar sind, beziehlich die Exponenten μ, ν haben, so kann man, wie in Art. 1 gezeigt worden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) & \text{ auf die Form } G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n) \\ \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) & \text{ » » » } G_1(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n) \end{aligned}$$

bringen, wo

$$\begin{aligned} G_0(t_1, t_2, \dots t_n) &= t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n) t_1^{\mu-1} + \dots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n) \\ G_1(t_1, t_2, \dots t_n) &= t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n) t_1^{\nu-1} + \dots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n) \end{aligned}$$

ist. Dabei verschwinden $\overset{0}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu, \overset{1}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu$ sämmtlich an der Stelle ($t_2 = 0, \dots t_n = 0$), während $\overline{\mathfrak{P}}_0(0, \dots 0), \overline{\mathfrak{P}}_1(0, \dots 0)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben.

Man nehme nun eine positive Grösse δ so an, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_1| \leq \delta, \dots |t_n| \leq \delta$$

genügende Werthsystem ($t_1, \dots t_n$) die angegebenen Umformungen von $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n), \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ gelten. Dann kann man ferner eine positive Grösse δ_1 , die kleiner als δ ist, so annehmen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots |t_n| \leq \delta_1$$

genügende Werthsystem ($t_2, \dots t_n$) jede der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} G_0(t_1, t_2, \dots t_n) &= 0, \\ G_1(t_1, t_2, \dots t_n) &= 0 \end{aligned}$$

nur durch solche Werthe von t_1 , die dem absoluten Betrage nach kleiner als δ sind, befriedigt wird. Sind für irgend ein System bestimmter Werthe von $t_2, \dots t_n$

$$t'_1, t''_1, \dots t_1^{(m)}$$

die von einander verschiedenen Werthe von t_1 , welche der einen oder der anderen dieser Gleichungen, oder auch beiden genügen, so hat man

$$\frac{G_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)} = (t_1 - t'_1)^{\lambda_1} \dots (t_1 - t_1^{(m)})^{\lambda_m},$$

wo $\lambda_1, \dots \lambda_m$ ganze Zahlen bezeichnen, deren Summe gleich $\nu - \mu$ ist. Hat eine dieser Zahlen einen negativen Werth, so kann man der Grösse t_1 einen

solchen Werth geben, dass

$$\left| \frac{G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots, t_n)} \right| > g$$

ist, wo g eine beliebig angenommene positive Grösse bedeutet, ohne dass $G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ ist. Infolge der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots, x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots, x_n)} = \frac{G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots, t_n)} \cdot \frac{\bar{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots, t_n)}{\bar{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots, t_n)}$$

existiren also in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $(0, 0, \dots, 0)$ Werthsysteme $(x_1, \dots, x_n)$, für die der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots, x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots, x_n)}$$

dem absoluten Betrage nach jede beliebig angenommene Grösse übertrifft. Daraus folgt sofort, dass, wenn $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots, x_n)$ theilbar sein soll, jede der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv oder gleich Null, und somit (zunächst unter der Voraussetzung, dass $t_2, \dots, t_n$ bestimmte, den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots, |t_n| \leq \delta_1$$

genügende Werthe haben, und der absolute Betrag der Veränderlichen t nicht grösser als δ sei) $G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ durch $G_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$ theilbar sein muss. Dazu ist zuerst erforderlich, dass $\nu \geq \mu$ sei.

Nun kann man aber, wenn diese Bedingung erfüllt ist, und

$$A_0 t_1^\mu + A_1 t_1^{\mu-1} + \dots + A_\mu, \quad B_0 t_1^\nu + B_1 t_1^{\nu-1} + \dots + B_\nu$$

zwei ganze Functionen von t_1 mit unbestimmten Coefficienten sind, zwei andere Functionen

$$C_0 t_1^{\nu-\mu} + \dots + C_{\nu-\mu}, \quad D_1 t_1^{\mu-1} + \dots + D_\mu$$

dergestalt bestimmen, dass die Gleichung

$$A_0^{\nu-\mu+1} (B_0 t_1^\nu + \dots + B_\nu) = (A_0 t_1^\mu + \dots + A_\mu) (C_0 t_1^{\nu-\mu} + \dots + C_{\nu-\mu}) + D_1 t_1^{\mu-1} + \dots + D_\mu$$

besteht; und es sind dann

$$C_0, \dots, C_{\nu-\mu}, \quad D_1, \dots, D_\mu$$

ganze Functionen von $A_0, \dots, A_\mu, B_0, \dots, B_\nu$. Die nothwendigen und hin-

reichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $A_0, \dots A_\mu$, $B_0, \dots B_\nu$ und unter der Voraussetzung, dass A_0 nicht den Werth Null habe,

$$B_0 t_1^\nu + \dots + B_\nu^\nu \text{ durch } A_0 t_1^\mu + \dots + A_\mu$$

theilbar sei, werden dann durch die μ Gleichungen

$$D_1 = 0, \dots D_\mu = 0$$

ausgedrückt.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_1 = \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \quad \dots \quad A_\mu = \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n), \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \quad \dots \quad B_\nu = \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n), \end{aligned}$$

so wird $C_0 = 1$, und $C_1, \dots C_{\nu-\mu}$, $D_1, \dots D_\mu$ werden Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$, die sämmtlich an der Stelle ($t_2 = 0, \dots t_n = 0$) verschwinden und mit

$$\overset{3}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{3}{\mathfrak{P}}_{\nu-\mu}(t_2, \dots t_n); \quad \overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

bezeichnet werden mögen. Damit $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sei, müssen nun

$$\overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

sämmtlich verschwinden, wenn

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots |t_n| \leq \delta_1.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn in jeder Reihe sämmtliche Coefficienten gleich Null sind.

Angenommen nun, diese Bedingung sei erfüllt, so hat man

$$\begin{aligned} G_1(t_1, t_2, \dots t_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot (t_1^{\nu-\mu} + \dots + \overset{3}{\mathfrak{P}}_{\nu-\mu}(t_2, \dots t_n)) \\ &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot G_s(t_1, t_2, \dots t_n), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \dots t_n) \\ \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot G_s(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, t_2, \dots t_n) \\ &= \mathfrak{P}_0(x_1, x_2, \dots x_n) \cdot G_s(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \dots t_n)} \\ &= \mathfrak{P}_0(x_1, x_2, \dots x_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, t_2, \dots t_n). \end{aligned}$$

Verwandelt man nunmehr $\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)$ in eine Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$, so

ergiebt sich

$$\mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \dots x_n) = \mathfrak{P}_0(x_1, x_2, \dots x_n) \mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Wir haben also folgenden Satz:

Es seien $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ zwei Potenzreihen von $x_1, \dots x_n$, welche beide an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwinden. Man bilde auf die angegebene Weise die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned} t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n) t_1^{\mu-1} + \dots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n) \\ t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n) t_1^{\nu-1} + \dots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n), \end{aligned}$$

und setze aus $\overset{0}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu, \overset{1}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu$ die Potenzreihen

$$\overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

zusammen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sei, besteht dann darin, dass in jeder der Reihen $\overset{4}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu$ sämtliche Coefficienten gleich Null sein müssen.

Es geht aber auch aus dem Vorstehenden hervor, dass nur in dem Falle, wo eine der mit $\lambda_1, \dots \lambda_m$ bezeichneten Zahlen negativ ist, $\mathfrak{P}_1$ nicht durch $\mathfrak{P}_0$ theilbar ist. Daraus lässt sich schliessen:

Kann man zeigen, dass der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)},$$

wenn $(x_1, \dots x_n)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ und so, dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ nicht gleich Null ist, angenommen wird, stets kleiner als eine angebbare Grösse ist, so reicht dies aus, um festzustellen, dass $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar ist.

Denn wäre das Letztere nicht der Fall, so müsste wenigstens eine der Zahlen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ negativ sein, und es existirte, wie gezeigt worden, innerhalb jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ ein Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$, für welches der absolute Betrag des in Rede stehenden Quotienten jede angebbare Grösse überträte, ohne dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ gleich Null wäre; was der Voraussetzung widerspricht.

In jedem Falle, wo entschieden werden kann, ob der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_0}$ die angegebene Beschaffenheit hat oder nicht, ist man demnach der Bildung der Reihen $\mathfrak{P}_1, \dots \mathfrak{P}_\mu$ überhoben.

Es soll nun ferner untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n), \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$, die beide an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwinden, einen gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form, der ebenfalls an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindet, besitzen.

Angenommen, man habe

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \cdot \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n),$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \cdot \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n),$$

und es sei $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0) = 0$. Man verwandle wieder $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ auf die angegebene Weise in Functionen von $t_1, \dots t_n$. Zuzufolge der in Betreff der Functionen $\mathfrak{P}_0(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1), \mathfrak{P}_1(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$ gemachten Voraussetzung kann auch $\mathfrak{P}_2(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$ nicht für jeden Werth von t_1 verschwinden; die höchste Potenz von t_1 , durch welche diese Function theilbar ist, habe den Exponenten λ , so kann man

$$\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \text{ auf die Form } G_2(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)$$

bringen, wo

$$G_2(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^\lambda + \mathfrak{P}_1(t_2, \dots t_n) t_1^{\lambda-1} + \dots + \mathfrak{P}_\lambda(t_2, \dots t_n),$$

und $\overline{\mathfrak{P}}_2(0, \dots 0)$ nicht gleich Null ist.

Dann hat man

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n) \frac{\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)} \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n) \mathfrak{P}_5(t_1, \dots t_n),$$

$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n) \frac{\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)} \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n) \mathfrak{P}_6(t_1, \dots t_n).$$

Es sind also

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$$

beide durch $G_2(t_1, t_2, \dots t_n)$ theilbar.

Nun kann man bekanntlich, wenn

$$A_0, A_1, \dots A_\mu, \quad B_0, B_1, \dots B_\nu$$

unbestimmte Grössen bedeuten, aus denselben eine Reihe von ganzen Functionen

$$C, C_1, C_2, \dots$$

zusammensetzen, mittelst welcher die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $A_0, \dots A_\mu, B_0, \dots B_\nu$ und unter der Voraussetzung, dass weder A_0 noch B_0 gleich Null sei, die Functionen

$$A_0 t_1^\mu + \dots + A_\mu, \quad B_0 t_1^\nu + \dots + B_\nu$$

einen grössten gemeinschaftlichen Theiler λ^{ten} Grades besitzen, sich folgendermassen ausdrücken lassen: Es muss C_λ in der Reihe der Grössen $C, C_1, C_2, \dots$ die erste sein, welche nicht gleich Null ist.

Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, stellt sich dann der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Functionen in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{C'_\lambda}{C_\lambda} t_1^{\lambda-1} + \dots + \frac{C_\lambda^{(\lambda)}}{C_\lambda}$$

dar, wo $C'_\lambda, \dots C_\lambda^{(\lambda)}$ ebenfalls ganze Functionen von $A_0, \dots A_\mu, B_0, \dots B_\nu$ sind. Nimmt man

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_1 = \mathfrak{P}_1(t_2, \dots t_n), \quad \dots \quad A_\mu = \mathfrak{P}_\mu(t_2, \dots t_n), \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = \mathfrak{P}_1(t_2, \dots t_n), \quad \dots \quad B_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t_2, \dots t_n), \end{aligned}$$

so werden $C, C_1, C_2, \dots; C'_\lambda, C''_\lambda, \dots$ Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$, die mit

$$\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n), \mathfrak{P}^{(1)}(t_2, \dots t_n), \mathfrak{P}^{(2)}(t_2, \dots t_n), \dots; \mathfrak{P}^{(\lambda, 1)}(t_2, \dots t_n), \mathfrak{P}^{(\lambda, 2)}(t_2, \dots t_n), \dots$$

bezeichnet werden mögen. Dann muss, damit für ein bestimmtes Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen gemeinschaftlichen Theiler haben,

$$\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n) = 0$$

sein. Diese Gleichung besteht also bei der in Betreff der Functionen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n), \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ gemachten Annahme, wenn man den Grössen $t_2, \dots t_n$ solche Werthe giebt, für welche die angegebenen Umformungen von $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ gelten; woraus folgt, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n)$ sämmtlich gleich Null sein müssen.

Damit ist die nothwendige Bedingung dafür, dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n), \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, festgestellt.

Angenommen nun, es seien für zwei gegebene Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n), \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ die im Vorstehenden definirten Functionen

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n), \\ \mathfrak{P}(t_2, \dots t_n), \mathfrak{P}^{(1)}(t_2, \dots t_n), \mathfrak{P}^{(2)}(t_2, \dots t_n), \dots$$

gebildet, und es ergebe sich, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n)$ sämmtlich gleich Null sind, so wie ferner, dass $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ in der Reihe der Functionen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{(1)}, \dots$ die erste sei, die nicht identisch gleich Null ist. Nimmt man dann im Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Reihen

$$\overset{\circ}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{\circ}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n), \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n)$$

irgend ein bestimmtes Werthsystem $(\tau_2, \dots \tau_n)$ der Grössen $t_2, \dots t_n$ an und unterwirft diese der Bedingung, dass

$$|t_2| \leq |\tau_2|, \dots |t_n| \leq |\tau_n|$$

und $\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)$ nicht gleich Null sein soll, so haben

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen grössten gemeinschaftlichen Theiler vom Grade λ , der zunächst in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda, 1)}(t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)} t_1^{\lambda-1} + \dots + \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda, \lambda)}(t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)}$$

erhalten wird. Die Werthe von t_1 , für welche diese Function verschwindet, sind sämmtlich unter denen, für die $G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$ wird, enthalten. Jeder der letzteren aber hat, wie man auch $t_2, \dots t_n$ den angegebenen Bedingungen entsprechend annehmen möge, einen endlichen Werth, dessen absoluter Betrag unterhalb einer angebbaren, von $t_2, \dots t_n$ unabhängigen Grenze liegt. Dasselbe gilt also auch von dem Bruch

$$\frac{\mathfrak{P}^{(\lambda, \lambda')}(t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)}, \quad (\lambda' = 1, \dots, \lambda)$$

woraus sich nach dem Obigen ergibt, dass der Zähler durch den Nenner theilbar ist. Damit ist bewiesen, dass der vorstehende gemeinschaftliche

Theiler von $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ und $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$ in der Form

$$G_2^q(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^2 + \mathfrak{P}_1(t_2, \dots t_n) t_1^{q-1} + \dots + \mathfrak{P}_2(t_2, \dots t_n)$$

dargestellt werden kann.

Betrachtet man nun wieder $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$, $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$, $G_2(t_1, t_2, \dots t_n)$ als Functionen von t_1 und dividirt die beiden ersten durch die dritte, so ergibt sich:

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n) G_3(t_1, t_2, \dots t_n),$$

$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n) G_4(t_1, t_2, \dots t_n),$$

wo G_3 , G_4 ganze Functionen von t_1 , deren Coefficienten Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$ sind, bezeichnen.

Multiplicirt man sodann die erste dieser Gleichungen mit $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$, die zweite mit $\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$ und drückt darauf $t_1, \dots t_n$ durch $x_1, \dots x_n$ aus, so ergibt sich:

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n),$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n),$$

wo

$$\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)$$

ist.

Es lässt sich nun ferner beweisen, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar sind.

Es ist:

$$\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n) = G_3(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \dots t_n),$$

$$\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n) = G_4(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, t_2, \dots t_n).$$

Wären nun $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar, so müssten sich, wie oben gezeigt worden ist, zwei Grössen δ, δ_1 so annehmen lassen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots |t_n| \leq \delta_1$$

genügende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$ die Gleichungen

$$G_3(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n) = 0,$$

$$G_4(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n) = 0$$

durch einen und denselben Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag kleiner als δ wäre, befriedigt würden. Bei hinlänglich kleinen Werthen von δ , δ_1 müsste dieser Werth von t_1 also den beiden Gleichungen

$$G_3(t_1, t_2, \dots t_n) = 0,$$

$$G_4(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$$

genügen, und es hätten somit für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$

$$G_3(t_1, t_2, \dots t_n) \text{ und } G_4(t_1, t_2, \dots t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen gemeinschaftlichen Theiler, und daher

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \text{ und } G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$$

einen gemeinschaftlichen Theiler von höherem als dem λ^{ten} Grade. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man $t_2, \dots t_n$ so annimmt, dass $\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)$ nicht verschwindet; und es ist somit die Annahme, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$ und $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar seien, unstatthaft.

Wir haben also den Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei gegebene, an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine dritte Reihe von derselben Beschaffenheit theilbar seien, besteht darin, dass die Coefficienten einer bestimmten, nach der gegebenen Vorschrift zu bildenden Potenzreihe von $n-1$ Veränderlichen $t_2, \dots t_n$ sämmtlich gleich Null sein müssen. Ferner ist es, wenn diese Bedingung erfüllt ist, stets möglich, $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$$

so auszudrücken, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. *)

*) Es lässt sich aus dem Vorhergehenden noch leicht ableiten, dass jede Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$, durch welche die gegebenen Reihen beide theilbar sind, nothwendig ein Theiler von $\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$ ist.

Hieran⁵⁵ knüpfen sich nun noch einige andere Sätze.

Ich nehme jetzt an, es seien $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar, aber $\mathfrak{P}_0(0, \dots 0)$ und $\mathfrak{P}_1(0, \dots 0)$ gleich Null. Dann giebt es, wenn $n > 2$ ist, in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ unendlich viele Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$, für die sowohl $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ als $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ verschwindet. Denn man drücke wieder $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ auf die angegebene Weise durch die Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_n$ aus, bestimme die Function $\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n)$ und nehme auch die Grössen δ, δ_1 so an, wie oben festgesetzt worden ist. Dann giebt es unendlich viele, den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots |t_n| \leq \delta_1$$

entsprechende Werthsysteme $(t_2, \dots t_n)$, für die

$$\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n) = 0$$

ist, und zu jedem dieser Werthsysteme giebt es wenigstens einen Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag kleiner als δ ist, und der die beiden Gleichungen

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0,$$

$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$$

befriedigt; woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

Man nehme jetzt im Gebiete der Grössen $x_1, \dots x_n$ irgend einen die Stelle $(0, \dots 0)$ umgebenden Bezirk so an, dass für jedes demselben angehörige Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ nicht nur die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n),$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = G_1(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$$

gelten, sondern auch $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben; und setze, unter $(c_1, \dots c_n)$ irgend ein bestimmtes Werthsystem der Grössen $x_1, \dots x_n$ in dem genannten Bezirke und unter $(b_1, \dots b_n)$ das entsprechende Werthsystem der Grössen $t_1, \dots t_n$ verstehend,

$$x_1 = c_1 + u_1, \quad \dots \quad x_n = c_n + u_n,$$

$$t_1 = b_1 + s_1, \quad \dots \quad t_n = b_n + s_n,$$

so dass man

$$\begin{aligned} u_1 &= g_{11}s_1 + \dots + g_{1n}s_n, \quad \dots \quad u_n = g_{n1}s_1 + \dots + g_{nn}s_n, \\ \mathfrak{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n) &= G_0(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(b_1 + s_1, \dots, b_n + s_n), \\ \mathfrak{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n) &= G_1(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) \overline{\mathfrak{P}}_1(b_1 + s_1, \dots, b_n + s_n) \end{aligned}$$

hat.

Es können nun $\mathfrak{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$, als Potenzreihen von $u_1, \dots, u_n$ betrachtet, einen an der Stelle ($u_1 = 0, \dots, u_n = 0$) verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler nur in dem Falle besitzen, wo $\mathfrak{P}_0(c_1, \dots, c_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1, \dots, c_n)$ beide gleich Null sind. Dann ist auch

$$\begin{aligned} G_0(b_1, b_2, \dots, b_n) &= 0, \\ G_1(b_1, b_2, \dots, b_n) &= 0; \end{aligned}$$

es geht aber aus den Ausdrücken von G_0, G_1 hervor, dass weder $G_0(b_1 + s_1, b_2, \dots, b_n)$ noch $G_1(b_1 + s_1, b_2, \dots, b_n)$ für jeden Werth von s_1 verschwindet; man kann also

$$\begin{aligned} G_0(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) &\text{ auf die Form } (s_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}(s_2, \dots, s_n)_1 s_1^{\mu-1} + \dots + \overset{0}{\mathfrak{P}}(s_2, \dots, s_n)_\mu) \overline{\mathfrak{P}}(s_1, \dots, s_n)_0, \\ G_1(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) &\gg \gg \gg (s_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}(s_2, \dots, s_n)_1 s_1^{\nu-1} + \dots + \overset{1}{\mathfrak{P}}(s_2, \dots, s_n)_\nu) \overline{\mathfrak{P}}(s_1, \dots, s_n)_1 \end{aligned}$$

in der Art bringen, dass

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathfrak{P}}(0, \dots, 0)_1, \dots, \overset{0}{\mathfrak{P}}(0, \dots, 0)_\mu, \\ \overset{1}{\mathfrak{P}}(0, \dots, 0)_1, \dots, \overset{1}{\mathfrak{P}}(0, \dots, 0)_\nu \end{aligned}$$

sämmtlich gleich Null sind, während $\overline{\mathfrak{P}}(0, \dots, 0)_0, \overline{\mathfrak{P}}(0, \dots, 0)_1$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben.

Angenommen nun, $\mathfrak{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$ wären beide durch eine dritte an der Stelle ($u_1 = 0, \dots, u_n = 0$) verschwindende Potenzreihe von $u_1, \dots, u_n$ theilbar, so würde sich nach dem Vorhergehenden zu jedem System unendlich kleiner Werthe von $s_2, \dots, s_n$ ein ebenfalls unendlich kleiner Werth von s_1 finden lassen, für den

$$G_0(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n), \quad G_1(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n)$$

beide gleich Null wären. Dann aber müsste

$$\mathfrak{P}(b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) = 0$$

für jedes System unendlich kleiner Werthe von $s_2, \dots, s_n$ sein, was nach einem

bekannten Satze nur der Fall ist, wenn

$$\mathfrak{P}(t_1, \dots, t_n)$$

für jedes dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsystem $t_1, \dots, t_n$ verschwindet, also die Coefficienten der Reihe sämmtlich gleich Null sind. Bei der in Betreff der Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots, x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ gemachten Annahme ist aber $\mathfrak{P}(t_1, \dots, t_n)$ nicht identisch gleich Null; und es ist somit erwiesen:

Wenn die Reihen

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots, x_n), \quad \mathfrak{P}_1(x_1, \dots, x_n)$$

keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so haben auch

$$\mathfrak{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n), \quad \mathfrak{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n),$$

als Potenzreihen von $u_1, \dots, u_n$ betrachtet, keinen an der Stelle $(u_1 = 0, \dots, u_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler, vorausgesetzt, dass die Stelle $(x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n)$ innerhalb einer gewissen — oben definirten — Umgebung der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ angenommen werde.

3. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen beliebig vieler Veränderlichen.

Ich sage von einer eindeutigen analytischen Function $f(x_1, \dots, x_n)$, sie verhalte sich an einer bestimmten Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ regulär, wenn sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine Reihe von der Form

$$\sum \left\{ A_{\nu_1, \dots, \nu_n} (x_1 - a_1)^{\nu_1} \dots (x_n - a_n)^{\nu_n} \right\} \\ (\nu_1, \dots, \nu_n = 0, \dots, \infty)$$

dargestellt werden kann, wo $\nu_1, \dots, \nu_n$ ganze, nicht negative Zahlen bezeichnen und unter den Coefficienten $A_{\nu_1, \dots, \nu_n}$ von $x_1, \dots, x_n$ unabhängige Grössen zu verstehen sind. Diese Reihe nenne ich dann ein reguläres Element der Function. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen $a_1, \dots, a_n$ zum Theil oder auch alle den Werth ∞ haben können, wenn festgesetzt wird, dass das Zeichen $(x - \infty)$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{x}$ sein soll.

Aus der vorstehenden Definition ergibt sich nun sofort:

Verhält sich eine eindeutige analytische Function $f(x_1, \dots x_n)$ regulär an einer bestimmten Stelle $(a_1, \dots a_n)$, so gilt dasselbe auch von jeder Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$, die in einer gewissen Umgebung der ersteren liegt.

Denn es sei $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ die Reihe, welche die betrachtete Function in der Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ darstellt, so lässt sich aus derselben, wenn man im Innern ihres Convergenzbezirkes eine Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ willkürlich annimmt, eine andere Reihe $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$ dergestalt ableiten, dass für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) = \mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$$

besteht. Es ist also $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$ ebenfalls ein Element der Function $f(x_1, \dots x_n)$, und es verhält sich diese demnach auch an der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ regulär.

Die Gesamtheit der Stellen, an denen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ sich regulär verhält, bildet hiernach ein $2n$ -fach ausgedehntes Continuum im Gebiet der Grössen $x_1, \dots x_n$.

Dieses Continuum ist nun nothwendig begrenzt.

Angenommen nämlich, es sei $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ irgend ein Element der Function f , wobei vorausgesetzt werde, dass die Stelle $(a_1, \dots a_n)$ im Endlichen liege; so können zwei Fälle eintreten:

1. Convergiert die Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ für jedes System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \dots x_n$, so besteht, wenn $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$ irgend ein reguläres Element der Function f ist, für jedes dem Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}_1$ angehörige System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) = \mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n).$$

Dies ist aber unmöglich, wenn die Grössen $a'_1, \dots a'_n$ nicht sämtlich endliche Werthe haben, woraus folgt, dass in dem angenommenen Falle eine Stelle $(x_1, \dots x_n)$ im Innern oder an der Grenze des in Rede stehenden Continuuums liegt, je nachdem die Grössen $x_1, \dots x_n$ sämtlich endliche Werthe haben oder nicht.

2. Liegen die den Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ begrenzenden Stellen alle oder zum Theil im Endlichen, so giebt es, wie in

der Functionentheorie gezeigt wird, unter ihnen mindestens eine Stelle, an der sich $f(x_1, \dots x_n)$ nicht regulär verhält; eine solche Stelle liegt dann auch an der Grenze des in Rede stehenden Continuum.

Dies festgestellt, nenne ich jede an der Grenze dieses Continuum liegende Stelle eine singuläre Stelle für die betrachtete Function.

Ist $(a'_1, \dots a'_n)$ eine solche singuläre Stelle, so kann es möglicherweise eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$$

geben, die für $x_1 = a'_1, \dots x_n = a'_n$ verschwindet und so beschaffen ist, dass das Product

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) f(x_1, \dots x_n)$$

für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$$

dargestellt werden kann. In diesem Falle nenne ich $(a'_1, \dots a'_n)$ eine ausserwesentliche, in jedem andern Falle eine wesentliche singuläre Stelle.

Es giebt aber, wenn $n > 1$ ist, zwei wohl von einander zu unterscheidende Arten von ausserwesentlichen singulären Stellen.

Ist $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine solche Stelle, so lässt sich die Function $f(x_1, \dots x_n)$ für hinlänglich kleine Werthe der Differenzen $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ stets dergestalt in der Form

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)}$$

darstellen, dass $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ nicht beide durch eine dritte, an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ verschwindende Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ theilbar sind.

Wenn dann $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist für alle einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ der Werth von $f(x_1, \dots x_n)$ unendlich gross, und daher

$$f(x_1, \dots x_n) = \infty \text{ für } (x_1 = a_1, \dots x_n = a_n).$$

Verschwinden dagegen $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ beide an der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$, so kann man (nach Art. 1), indem man homogene lineare Functionen $t_1, t_2, \dots, t_n$ von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ einführt, in mannigfaltiger Weise

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) & \text{ auf die Form } (t_1^u + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots, t_n)t_1^{u-1} + \dots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots, t_n))\overline{\mathfrak{P}}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \\ \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) & \gg \gg \gg (t_1^v + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots, t_n)t_1^{v-1} + \dots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots, t_n))\overline{\mathfrak{P}}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \end{aligned}$$

bringen, dergestalt dass

$$\overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots, t_n), \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots, t_n)$$

für $t_2 = 0, \dots, t_n = 0$ verschwinden, $\overline{\mathfrak{P}}_0(0, \dots, 0)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(0, \dots, 0)$ beide von Null verschieden sind und die Functionen

$$\begin{aligned} t_1^u + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots, t_n)t_1^{u-1} + \dots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots, t_n), \\ t_1^v + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots, t_n)t_1^{v-1} + \dots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots, t_n) \end{aligned}$$

keinen an der Stelle $(t_1 = 0, \dots, t_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Dann existiren unzählige Systeme unendlich kleiner Werthe $t_1, t_2, \dots, t_n$, für welche die erste der vorstehenden Functionen, nicht aber zugleich die zweite verschwindet; woraus folgt, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung von $(a_1, \dots, a_n)$ andere Stellen $(x_1, \dots, x_n)$ giebt, an denen $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ verschwindet, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ aber nicht, so dass an jeder solchen Stelle $f(x_1, \dots, x_n) = \infty$ ist. Es hat aber, wenn b eine beliebig angenommene endliche Grösse ist, die Function

$$\frac{1}{f(x_1, \dots, x_n) - b}$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ dieselbe Form wie $f(x_1, \dots, x_n)$; es existiren also in jeder Umgebung von $(a_1, \dots, a_n)$ auch Stellen, an denen

$$\frac{1}{f(x_1, \dots, x_n) - b} = \infty,$$

d. h.

$$f(x_1, \dots, x_n) = b$$

ist. Es kann also $f(x_1, \dots, x_n)$ in dem jetzt betrachteten Falle in einer unendlich kleinen Umgebung der singulären Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ jeden

beliebigen Werth annehmen und besitzt deshalb an dieser Stelle selbst keinen bestimmten Werth.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich $f(x_1, \dots x_n)$ wie eine rationale Function verhält — d. h. die Gesammtheit der nicht singulären und der ausserwesentlichen singulären Stellen — ist ein $2n$ -fach ausgedehntes Continuum, dessen Begrenzung die wesentlichen singulären Stellen bilden.

Ist $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine bestimmte Stelle im Innern dieses Continuum, und hat $f(a_1, \dots a_n)$ einen bestimmten endlichen Werth, so verhält sich, wie schon oben angegeben worden ist, $f(x_1, \dots x_n)$ in einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ überall regulär.

Ist $f(a_1, \dots a_n) = \infty$, so giebt es in jeder Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$, die keine singuläre Stelle der Function

$$\frac{1}{f(x_1, \dots x_n)}$$

enthält, unendlich viele, eine $(2n-2)$ -fache Mannigfaltigkeit bildende Stellen, an denen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ den Werth ∞ hat, während sie sich an allen übrigen Stellen des genannten Bereiches regulär verhält.

Hat endlich $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ keinen bestimmten Werth, so giebt es in jeder Umgebung dieser Stelle nicht nur unendlich viele andere singuläre Stellen, an denen $f(x_1, \dots x_n)$ den Werth ∞ hat — was schon vorhin nachgewiesen ist — sondern auch, wenn $n > 2$ ist, unendlich viele Stellen, an denen $f(x_1, \dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat. Das Letztere lässt sich folgendermassen zeigen:

Es gelte für alle Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ in der Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) f(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n),$$

unter der gestatteten Annahme, dass die Potenzreihen $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ keinen an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der beiden Reihen nehme man eine Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ zunächst beliebig an, und setze

$$\begin{aligned} x_1 - a_1 &= \xi_1, & \dots & & x_n - a_n &= \xi_n, \\ x_1 - a'_1 &= \xi'_1, & \dots & & x_n - a'_n &= \xi'_n. \end{aligned}$$

Ferner sei c_x der Werth von ξ_x für $x_x = a'_x$, und $\eta_x = \xi_x - c_x$, so sind ξ'_x, η_x lineare Functionen von x_x , die beide für $x_x = a'_x$ verschwinden; man hat daher

$$\eta_x = \frac{h_x \xi'_x}{1 + l_x \xi'_x}, \quad \xi'_x = \frac{\eta_x}{h_x - l_x \eta_x}, \quad (x = 1, \dots, n)$$

wo h_x, l_x Constanten bezeichnen. (Wenn a_x nicht gleich ∞ ist, so ist $h_x = 1$, $l_x = 0$.) Entwickelt man nun

$$\mathfrak{P}_0(c_1 + \eta_1, \dots, c_n + \eta_n), \quad \mathfrak{P}_1(c_1 + \eta_1, \dots, c_n + \eta_n)$$

nach Potenzen von $\eta_1, \dots, \eta_n$ und verwandelt die so sich ergebenden Reihen in Potenzreihen von $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, die mit

$$\mathfrak{P}_2(\xi'_1, \dots, \xi'_n), \quad \mathfrak{P}_3(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$$

bezeichnet werden mögen, so gelten für alle einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots, a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots, x_n)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) &= \mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n), \\ \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) &= \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n), \\ \mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n) f(x_1, \dots, x_n) &= \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n). \end{aligned}$$

Nun nehme man — was dem am Schlusse von Art. 2 Bewiesenen zufolge stets angeht — n positive Grössen $C_1, \dots, C_n$ so an, dass erstens die Stelle $(\xi_1 = C_1, \dots, \xi_n = C_n)$ im gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_0(\xi_1, \dots, \xi_n), \mathfrak{P}_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ liegt, und dass zweitens, wenn man $c_1, \dots, c_n$ den Bedingungen

$$|c_1| \leq C_1, \dots, |c_n| \leq C_n$$

unterwirft, $\mathfrak{P}_0(c_1 + \eta_1, \dots, c_n + \eta_n), \mathfrak{P}_1(c_1 + \eta_1, \dots, c_n + \eta_n)$, als Potenzreihen von $\eta_1, \dots, \eta_n$ betrachtet, keinen an der Stelle $(\eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Dann besitzen auch die Reihen

$$\mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n),$$

wie sofort erhellt, keinen an der Stelle $(x_1 = a'_1, \dots, x_n = a'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler, und es hat daher nach dem vorhin Bewiesenen $f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle $(a'_1, \dots, a'_n)$ keinen bestimmten Werth, wenn $\mathfrak{P}_2(0, \dots, 0), \mathfrak{P}_3(0, \dots, 0)$ beide gleich Null sind. Es giebt aber, wenn $n > 2$ ist, wie am Schlusse von No. 2 gezeigt worden ist, unendlich viele, den vorstehenden

Bedingungen genügende Werthsysteme $(c_1, \dots c_n)$, für welche die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(c_1, \dots c_n) = 0, \quad \mathfrak{P}_1(c_1, \dots c_n) = 0$$

bestehen; jedem dieser Werthsysteme, deren Gesamtheit eine $(2n-4)$ -fache Mannigfaltigkeit bildet, entspricht also im Gebiete der Grössen $x_1, \dots x_n$ innerhalb des durch die Bedingungen

$$|x_1 - a_1| \leq C_1, \dots |x_n - a_n| \leq C_n$$

definirten Bezirkes eine Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$, an der $f(x_1, \dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat.

Hieran knüpft sich noch eine wichtige Bemerkung.

Es seien zwei beliebige Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n), \quad \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$$

gegeben, so lässt sich für die dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der beiden Reihen angehörigen Stellen $(x_1, \dots x_n)$, deren Gesamtheit mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werde, eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ in folgender Weise definiren:

Ist $x'_1, \dots x'_n$ eine Stelle von $\mathfrak{G}$, an der $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ nicht beide verschwinden, so soll

$$f(x'_1, \dots x'_n) = \frac{\mathfrak{P}_1(x'_1 - a_1, \dots x'_n - a_n)}{\mathfrak{P}_0(x'_1 - a_1, \dots x'_n - a_n)}$$

sein.

Hat aber an einer Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ sowohl $\mathfrak{P}_1$ als $\mathfrak{P}_0$ den Werth Null, so bringe man auf die im Vorhergehenden angegebene Weise

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) & \text{auf die Form } \mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) \mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n), \\ \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) & \text{» » » } \mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) \mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n), \end{array}$$

in der Art, dass die Reihen $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x'_1, \dots x_n = x'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Wenn dann

$$\mathfrak{P}_2(0, \dots 0), \quad \mathfrak{P}_3(0, \dots 0)$$

nicht beide gleich Null sind, so soll

$$f(x'_1, \dots x'_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)}{\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)}$$

sein. Dagegen soll, wenn sowohl

$$\mathfrak{P}_s(0, \dots 0) = 0 \text{ als } \mathfrak{P}_2(0, \dots 0) = 0$$

ist, $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ keinen bestimmten Werth haben.

Dies lässt sich auch so ausdrücken. Ist $(x'_1, \dots x'_n)$ irgend eine bestimmte Stelle von $\mathfrak{G}$, so kann man stets zwei Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n), \quad \mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n)$$

ohne einen an der Stelle $(x_1 = x'_1, \dots x_n = x'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler so bestimmen, dass an allen einer bestimmten Umgebung der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ angehörigen Stellen die Gleichung

$$\mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) \mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$$

besteht. Dann ist

$$f(x'_1, \dots x'_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)}{\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)}$$

zu setzen, mit der Massgabe, dass, wenn so dargestellt $f(x'_1, \dots x'_n)$ in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, der Function f an der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ kein bestimmter Werth beizulegen ist.

Es ist nun zu zeigen, dass die so definirte Function $f(x_1, \dots x_n)$ innerhalb des Bereiches $\mathfrak{G}$ eine eindeutige analytische Function ist, für welche diejenigen Stellen, an denen sie der gegebenen Definition gemäss den Werth ∞ hat oder unbestimmt ist, ausserwesentliche singuläre Stellen in dem oben festgestellten Sinne sind, während sie an allen übrigen Stellen sich regulär verhält.

Es sei $(x'_1, \dots x'_n)$ irgend eine bestimmte Stelle von $\mathfrak{G}$, und

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) \cdot \mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n),$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) = \mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) \cdot \mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n),$$

wo $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ dieselbe Bedeutung wie im Vorstehenden haben, und $\mathfrak{P}_4$ sich auf eine Constante reduciren kann. Nach dem oben Bewiesenen kann man nun eine Umgebung der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ so bestimmen, dass, wenn $(x''_1, \dots x''_n)$ eine bestimmte Stelle dieser Umgebung ist, und man aus $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ die drei Potenzreihen $\overline{\mathfrak{P}}_2, \overline{\mathfrak{P}}_3, \overline{\mathfrak{P}}_4$ von $x_1 - x''_1, \dots x_n - x''_n$ ableitet, für welche bei hinläng-

lich kleinen Werthen dieser Differenzen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) &= \overline{\mathfrak{P}}_2(x_1 - x''_1, \dots x_n - x''_n), \\ \mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) &= \overline{\mathfrak{P}}_3(x_1 - x''_1, \dots x_n - x''_n), \\ \mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n) &= \overline{\mathfrak{P}}_4(x_1 - x''_1, \dots x_n - x''_n)\end{aligned}$$

bestehen, die beiden Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_2, \overline{\mathfrak{P}}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x''_1, \dots x_n = x''_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Wenn dann $f(x''_1, \dots x''_n)$ einen bestimmten endlichen Werth hat, so ist

$$\begin{aligned}f(x''_1, \dots x''_n) &= \frac{\overline{\mathfrak{P}}_3(0, \dots 0)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(0, \dots 0)} \\ &= \frac{\mathfrak{P}_3(x''_1 - x'_1, \dots x''_n - x'_n)}{\mathfrak{P}_2(x''_1 - x'_1, \dots x''_n - x'_n)},\end{aligned}$$

d. h. es gilt die Gleichung

$$f(x_1, \dots x_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n)}{\mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n)}$$

innerhalb einer gewissen Umgebung der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ für alle Stellen $(x_1, \dots x_n)$, an denen $f(x_1, \dots x_n)$ einen bestimmten endlichen Werth hat. Wenn daher $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)$ nicht gleich Null ist, so verhält sich $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ regulär.

Ist $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0) = 0$, nicht aber $\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)$, so kann man die in Rede stehende Umgebung von $(x'_1, \dots x'_n)$ so klein annehmen, dass an allen Stellen derselben der absolute Betrag von $f(x_1, \dots x_n)$ grösser ist als jede beliebig angenommene endliche Grösse, so dass $f(x'_1, \dots x'_n) = \infty$ zu setzen ist, wie der Ausdruck von $f(x_1, \dots x_n)$ angiebt.

Sind endlich $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0), \mathfrak{P}_3(0, \dots 0)$ beide gleich Null, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, in jeder noch so kleinen Umgebung von $(x'_1, \dots x'_n)$ Stellen, an denen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ einen beliebig vorgeschriebenen Werth hat; sie hat also an der Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ selbst keinen bestimmten Werth.

Damit ist bewiesen, dass die in der angegebenen Weise definirte Function $f(x_1, \dots x_n)$ innerhalb des Bezirkes $\mathfrak{G}$ sich überall wie eine rationale Function verhält.

4. Zur Theorie der ganzen eindeutigen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen.

Dem Vorstehenden zufolge stellt eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, \dots x_n)$, die für jedes System endlicher Werthe der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ convergirt, eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ dar, die sich an jeder im Endlichen des Grössengebiets $(x_1, \dots x_n)$ liegenden Stelle regulär verhält.

Umgekehrt weiss man, dass jede eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$, die sich an allen im Endlichen liegenden Stellen des Gebietes $(x_1, \dots x_n)$ regulär verhält, durch eine für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergirende Reihe $\mathfrak{P}(x_1, \dots x_n)$ ausgedrückt werden kann.

Ich nenne eine solche Function $f(x_1, \dots x_n)$ eine ganze Function. Hat die Reihe, durch welche sie dargestellt wird, unendlich viele Glieder, deren Coefficienten nicht gleich Null sind, so ist die Function eine transcendente.

Sind ferner zwei Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ gegeben, welche beide für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergiren, so wird durch den Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)}$$

den in Art. 3 festgesetzten Bestimmungen gemäss eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ definirt, die dadurch charakterisirt ist, dass sie sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Grössengebiets $(x_1, \dots x_n)$ wie eine rationale Function verhält.

Ob aber umgekehrt jede eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$, welche sich im Endlichen überall wie eine rationale Function verhält — also, wenn $(a_1, \dots a_n)$ irgend ein System endlicher Werthe ist, in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ ausgedrückt werden kann —, auch als Quotient zweier für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergirenden Potenzreihen sich darstellen lasse, das ist eine für Functionen von mehreren Veränderlichen bis jetzt unerledigte Frage, welche sehr erhebliche Schwierigkeiten darzubieten scheint.

Mit dieser Frage ist aber noch eine andere verknüpft.

Für jede rationale Function von $x_1, \dots x_n$ gilt, dass sie als Quotient zweier ganzen Functionen dieser Veränderlichen dargestellt werden kann und

zwar so, dass der Dividend und der Divisor keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Dann verschwinden Dividend und Divisor gleichzeitig nur an solchen Stellen, an denen die Function keinen bestimmten Werth hat. Es entsteht also die Frage, ob in dem Falle, wo eine Function als Quotient zweier ganzen Functionen von $x_1, \dots x_n$, von denen wenigstens eine transcendent ist, dargestellt werden kann, dies auch in der Art geschehen könne, dass der Quotient nur bei solchen Werthsystemen der Veränderlichen, für welche die Function unbestimmt ist, in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint — mit andern Worten, dass aus den Werthen, welche Dividend und Divisor an einer bestimmten Stelle haben, sich unmittelbar entnehmen lässt, ob an dieser Stelle die Function einen bestimmten Werth hat oder nicht, und wie sie sich in der Umgebung dieser Stelle verhält. Auch diese Frage ist bis jetzt nur für Functionen von einer Veränderlichen — und zwar für diese im bejahenden Sinne — entschieden.

In manchen Fällen, wo eine eindeutige Function mehrerer Veränderlichen durch analytische Bestimmungen definirt ist, ist es aber möglich, die angeregten Fragen mittelst eines Theorems, das ich im Folgenden ausführlich entwickeln will, zu erledigen.

Es bedeute jetzt $f(x_1, \dots x_n)$ eine (transcendente oder rationale) ganze Function der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$. Man setze für diese Grössen ganze lineare Functionen einer Veränderlichen τ :

$$x_1 = a_1 + c_1 \tau, \quad \dots \quad x_n = a_n + c_n \tau,$$

so geht $f(x_1, \dots x_n)$ in eine ganze Function von τ über, welche im Allgemeinen — d. h. wenn die Grössen $c_1, \dots c_n$ einer sogleich anzugebenden Beschränkung unterworfen werden — nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Denn es erhält $f(x_1, \dots x_n)$, nach Potenzen von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ entwickelt, die Form

$$\sum_{v=0}^{\infty} (x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)^v,$$

wo $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)^v$ eine homogene ganze Function v^{ten} Grades von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ bezeichnet; es brauchen also die Grössen $c_1, \dots c_n$ nur die Bedingung zu erfüllen, dass die Ausdrücke

$$(c_1, \dots c_n)^v$$

nicht alle gleich Null sind. Dies vorausgesetzt, sei in der Entwicklung von $f(a_1 + c_1 \tau, \dots, a_n + c_n \tau)$ nach Potenzen von τ das erste Glied, dessen Coefficient nicht verschwindet, von der Ordnung μ , so hat man

$$f(a_1 + c_1 \tau, \dots, a_n + c_n \tau) = C_\mu \tau^\mu + C_{\mu+1} \tau^{\mu+1} + \dots,$$

wo C_μ nicht gleich Null ist. Daraus ergibt sich für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\frac{d \log f(a_1 + c_1 \tau, \dots, a_n + c_n \tau)}{d\tau} = \mu \tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Setzt man also

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha,$$

wo $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ eindeutige Functionen sind, welche sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Gebietes $(x_1, \dots, x_n)$ wie rationale Functionen verhalten und den Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \dots, n \\ \beta = 1, \dots, n \end{pmatrix}$$

genügen, so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha = (\mu \tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)) d\tau,$$

wenn

$$x_1 = a_1 + c_1 \tau, \dots, x_n = a_n + c_n \tau$$

gesetzt wird, und es ist dann μ stets entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl.

Dieser Satz lässt sich nun in folgender Weise umkehren:

Es seien n Functionen

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$$

gegeben, welche den folgenden Bedingungen genügen:

- 1) Sie sollen eindeutige Functionen sein, für die wesentliche singuläre Stellen im Endlichen des Grössengebiets $(x_1, \dots, x_n)$ nicht existiren.
- 2) Der Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha$$

soll die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 1, \dots, n \\ \beta = 1, \dots, n \end{matrix} \right).$$

ausgedrückten Integrabilitätsbedingungen erfüllen.

- 3) Es soll, wenn man für $x_1, \dots, x_n$ irgend welche ganze lineare Functionen einer Veränderlichen τ substituirt:

$$x_1 = a_1 + c_1 \tau, \quad \dots \quad x_n = a_n + c_n \tau,$$

für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha \text{ die Form } (\mu \tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)) d\tau$$

annehmen, und dann μ entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl sein, vorausgesetzt, dass von den beiden Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$, als deren Quotient

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha f_\alpha(x_1, \dots, x_n)$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ dargestellt werden kann, der Divisor durch die angegebenen Substitutionen nicht identisch gleich Null werde.

Alsdann existirt eine ganze Function $f(x_1, \dots, x_n)$, welche der Differentialgleichung

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha$$

genügt und völlig bestimmt ist, wenn der Werth irgend eines ihrer Coefficienten, der in Folge der vorstehenden Gleichung nicht nothwendig gleich Null ist, fixirt wird, was in beliebiger Weise geschehen kann.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme ich zuerst an, es sei innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ jede Function f_α in der Form

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_1, \dots, x_n) &= \mathfrak{P}_\alpha(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)_\alpha^\nu \end{aligned}$$

darstellbar. Dann ist zufolge der Bedingung 2)

$$\frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_\alpha^\nu}{\partial x_\beta} = \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_\beta^\nu}{\partial x_\alpha}.$$

Setzt man

$$(x_1, \dots, x_n)^{r+1} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\nu+1} (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu} x_{\alpha},$$

so ist

$$d(x_1, \dots, x_n)^{r+1} = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \frac{1}{\nu+1} (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu} dx_{\alpha} \right\} + \frac{1}{\nu+1} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu}}{\partial x_{\beta}} x_{\alpha} dx_{\beta}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu}}{\partial x_{\beta}} x_{\alpha} dx_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_{\beta}^{\nu}}{\partial x_{\alpha}} x_{\alpha} dx_{\beta} \\ &= \sum_{\beta=1}^n \nu (x_1, \dots, x_n)_{\beta}^{\nu} dx_{\beta} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \nu (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu} dx_{\alpha}, \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} d(x_1, \dots, x_n)^{r+1} &= \sum_{\alpha=1}^n (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu} dx_{\alpha}, \\ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{r=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^{\nu} dx_{\alpha} &= d \sum_{r=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)^{r+1}. \end{aligned}$$

Entwickelt man also, unter C eine willkürlich anzunehmende Constante ver-
stehend, den Ausdruck

$$C e^{\sum_{r=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)^{r+1}}$$

nach Potenzen von $x_1, \dots, x_n$, so genügt die so sich ergebende Potenzreihe, für $f(x_1, \dots, x_n)$ gesetzt, der in Rede stehenden Differentialgleichung und ist sicher convergent in dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Entwicklungen von $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$.

Zweitens nehme ich an, man habe für alle einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots, x_n)$

$$f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mathfrak{P}_{\alpha}^{(1)}(x_1, \dots, x_n)}{\mathfrak{P}_{\alpha}^{(0)}(x_1, \dots, x_n)},$$

wobei ich bemerke, dass es nicht eine nothwendige Bedingung ist, dass $\mathfrak{P}_{\alpha}^{(0)}(x_1, \dots, x_n), \mathfrak{P}_{\alpha}^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Man substituirt nun für $x_1, \dots, x_n$ homogene lineare Functionen von n andern Veränderlichen $t_1, \dots, t_n$:

$$x_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^n g_{\alpha\beta} t_{\beta}, \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

wodurch sich das Differential

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

in ein anderes von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha}(t_1, \dots, t_n) dt_{\alpha}$$

verwandelt, für welches die Integrabilitätsbedingungen ebenfalls erfüllt sind. Die Constanten $g_{\alpha\beta}$ hat man so anzunehmen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und bei keiner der Functionen

$$\mathfrak{P}_1^{(0)}(g_{11}t_1, \dots, g_{n1}t_1), \dots, \mathfrak{P}_n^{(0)}(g_{11}t_1, \dots, g_{n1}t_1),$$

wenn man sie nach Potenzen von t_1 entwickelt, sämtliche Coefficienten verschwinden.

Dann lässt sich

$$\varphi_{\alpha}(t_1, \dots, t_n) \text{ in der Form } \frac{\mathfrak{P}_{\alpha}(t_1, \dots, t_n)}{\mathfrak{P}_0(t_1, \dots, t_n)}$$

darstellen, und es ist $\mathfrak{P}_0(t_1, 0, \dots, 0)$ eine Potenzreihe von t_1 , deren Coefficienten nicht sämtlich gleich Null sind. Ist das Anfangsglied dieser Reihe von der Ordnung l , so nehme man eine positive Grösse δ_1 so an, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1, t_2 = 0, \dots, t_n = 0)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_0(t_1, \dots, t_n), \mathfrak{P}_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \mathfrak{P}_n(t_1, \dots, t_n)$$

liegt, und die Function

$$t_1^{-l} \mathfrak{P}_0(t_1, 0, \dots, 0)$$

für jeden Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag nicht grösser als δ_1 ist, einen von Null verschiedenen Werth hat. Wird darauf eine zweite positive Grösse δ' , die kleiner als δ_1 ist, beliebig angenommen, so lassen sich $n-1$ andere $\delta_2, \dots, \delta_n$ so bestimmen, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1, t_2 = \delta_2, \dots, t_n = \delta_n)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Reihen $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ liegt,

und für jedes den Bedingungen

$$A) \quad \delta' \leq |t_1| \leq \delta_1, |t_2| \leq \delta_2, \dots |t_n| \leq \delta_n$$

genügende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots t_n)$

$$|\mathfrak{P}_0(t_1, 0, \dots 0)| > |\mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \dots t_n) - \mathfrak{P}_0(t_1, 0, \dots 0)|$$

ist. Dann giebt es, wie in Art. 1 gezeigt worden ist, für jedes den Bedingungen

$$B) \quad |t_2| \leq \delta_2, \dots |t_n| \leq \delta_n$$

entsprechende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$ unter denjenigen Werthen von t_1 , für welche $|t_1| \leq \delta_1$ ist, nicht mehr als l , welche der Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$$

genügen, und diese sind ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als δ' . Nun sei $(t'_2, \dots t'_n)$ irgend ein System bestimmter, den Bedingungen B) genügender Werthe von $t_2, \dots t_n$, und es habe die Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(t_1, t'_2, \dots t'_n) = 0$$

r von einander verschiedene Wurzeln

$$t'_1, t''_1, \dots t^{(r)}_1,$$

welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ' sind. Setzt man dann

$$t_1 = t'_1 + \tau, \quad t_2 = t'_2, \quad \dots \quad t_n = t'_n,$$

so werden $x_1, \dots x_n$ ganze lineare Function von τ , welche der oben unter 3) angegebenen Bedingung genügen, indem

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots x_n) dx_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathfrak{P}_{\alpha}(t_1, \dots t_n)}{\mathfrak{P}_0(t_1, \dots t_n)} dt_{\alpha}$$

ist, und $\mathfrak{P}_0(t'_1 + \tau, t'_2, \dots t'_n)$ nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Man erhält also für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\varphi_1(t'_1 + \tau, t'_2, \dots t'_n) = \frac{m'}{\tau} + \mathfrak{P}'(\tau),$$

wo m' eine ganze Zahl und ≥ 0 ist; und ebenso

$$\varphi_1(t''_1 + \tau, t'_2, \dots t'_n) = \frac{m''}{\tau} + \mathfrak{P}''(\tau), \quad \dots \quad \varphi_1(t^{(r)}_1 + \tau, t'_2, \dots t'_n) = \frac{m^{(r)}}{\tau} + \mathfrak{P}^{(r)}(\tau),$$

wo $m'', \dots m^{(r)}$ gleichfalls ganze, nicht negative Zahlen sind. Daraus folgt, dass die Differenz

$$\varphi_1(t_1, t'_1, \dots t'_n) - \left(\frac{m'}{t_1 - t'_1} + \frac{m''}{t_1 - t''_1} + \dots + \frac{m^{(r)}}{t_1 - t^{(r)}_1} \right)$$

für keinen Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag kleiner als δ_1 ist, unendlich gross wird und demgemäss in der Form

$$\mathfrak{P}(t_1)$$

dargestellt werden kann. Setzt man also

$$\varphi(t) = (t - t'_1)^{m'} (t - t''_1)^{m''} \dots (t - t^{(r)}_1)^{m^{(r)}},$$

so ergibt sich für jeden der Bedingung $|t_1| < \delta_1$ genügenden Werth von t_1

$$\varphi_1(t_1, t'_1, \dots t'_n) = \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} + \mathfrak{P}(t_1).$$

Die Function $\varphi(t)$ lässt sich aber ermitteln, ohne dass es nöthig wäre, die Grössen $t'_1, t''_1, \dots t^{(r)}_1$ und die zugehörigen Zahlen $m', m'', \dots m^{(r)}$ zu bestimmen.

Man kann, wenn man die Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ den Bedingungen

$$C) \quad |t_1| \leq \delta_1, |t_2| \leq \delta_2, \dots |t_n| \leq \delta_n$$

unterwirft, $\mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ in der oben (in Art. 1) angegebenen Weise auf die Form

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$$

bringen, in der Art, dass $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$ für kein den vorstehenden Bedingungen entsprechendes Werthsystem $(t_1, t_2, \dots t_n)$ verschwindet. Die Function $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ kann dann nicht unendlich klein werden, wenn man die Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ den Bedingungen A) unterwirft. Für alle diesen Bedingungen genügenden Werthsysteme $(t_1, t_2, \dots t_n)$ lässt sich deshalb

$$\frac{1}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)}$$

in eine gleichmässig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} T_{\nu} t_1^{-i-\nu}$$

entwickeln, in der die Coefficienten T'_ν gewöhnliche Potenzreihen von $t_2, \dots, t_n$ sind. Diese Reihe convergirt dann auch, als Potenzreihe von $t_1, t_2, \dots, t_n$ betrachtet, bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt für die gewöhnliche Potenzreihe von $t_1, t_2, \dots, t_n$, in welche der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1(t_1, \dots, t_n)}{\mathfrak{P}_0(t_1, \dots, t_n)}$$

verwandelt werden kann; man erhält daher für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(t_1, \dots, t_n)$ die Function $\varphi_1(t_1, \dots, t_n)$ dargestellt durch eine bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirende Potenzreihe der Grössen $t_1, t_2, \dots, t_n$, welche negative Potenzen von t_1 im Allgemeinen in unendlicher Anzahl, aber keine negativen Potenzen von $t_2, \dots, t_n$ enthält und somit auf die Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2, \dots, t_n) t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots, t_n) t_1^{\nu}$$

gebracht werden kann.*)

Es lässt sich aber auch

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \frac{m'}{t_1 - t'_1} + \frac{m''}{t_1 - t''_1} + \dots + \frac{m^{(n)}}{t_1 - t^{(n)}_1},$$

wenn $|t_1| \geq \delta'$ ist, in eine Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} T'_{\mu+1} t_1^{-\mu-1}$$

entwickeln, und es ist dann namentlich $T'_1 = m' + m'' + \dots + m^{(n)}$. Man hat also

$$\varphi_1(t_1, t'_2, \dots, t'_n) - \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t'_2, \dots, t'_n) - T'_{\mu+1} \right\} t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t'_2, \dots, t'_n) t_1^{\nu}.$$

Aus dieser Reihe müssen nun dem vorhin Bemerkten zufolge alle Glieder mit einer negativen Potenz von t_1 verschwinden; man hat also

$$T'_{\mu+1} = \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t'_2, \dots, t'_n) \quad (\mu = 0, \dots, \infty).$$

*) Diese Reihe erhält man auch dadurch, dass man (unter der Annahme $\delta' \leq |t_1| \leq \delta_1$) die Function $\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ als Potenzreihe von $t_2, \dots, t_n$ darstellt und darauf die Coefficienten derselben, welche sämmtlich die Form

$$\frac{\mathfrak{P}(t_1)}{\mathfrak{P}'_0(t_1, 0, \dots, 0)}$$

haben, nach steigenden Potenzen von t_1 entwickelt.

Es ist daher $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots, t_n)$ für jedes der betrachteten Werthsysteme $(t_2, \dots, t_n)$ eine ganze Zahl. Daraus folgt, dass sich $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots, t_n)$ auf ein von $t_2, \dots, t_n$ unabhängiges Glied reducirt. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots, t_n)$ eine continuirliche Function von $t_2, \dots, t_n$ sein, die auch andere als ganzzahlige Werthe haben könnte. Es ist also die Summe $(m' + m'' + \dots + m^{(r)})$ von dem gewählten Werthsystem $(t'_2, \dots, t'_n)$ unabhängig und kann gefunden werden, wenn man gleichzeitig $t'_2 = 0, \dots, t'_n = 0$ setzt.

Da nun, wenn $t'_2, \dots, t'_n$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden,

$$\varphi_1(t_1, 0, \dots, 0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(0, \dots, 0) t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(0, \dots, 0) t_1^{\nu},$$

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = (m' + m'' + \dots + m^{(r)}) t_1^{-1}$$

ist, und aus der Differenz der Ausdrücke auf der Rechten dieser Gleichungen alle Glieder mit negativen Potenzen von t_1 wegfallen müssen, so sieht man, dass die Entwicklung von

$$\varphi_1(t_1, 0, \dots, 0)$$

für jeden Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag $\leq \delta_1$ ist, die Gestalt

$$m t_1^{-1} + \mathfrak{P}(t_1)$$

hat, wo m eine ganze Zahl bedeutet, die ≥ 0 ist, und dass man

$$m' + m'' + \dots + m^{(r)} = m$$

hat. Dabei ist noch zu bemerken, dass m immer > 0 ist, wenn nicht etwa jede Function $\mathfrak{P}_a^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$ durch $\mathfrak{P}_a^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$ theilbar ist, welcher Fall schon behandelt worden und hier auszuschliessen ist.

Nachdem so der Grad der Function $\varphi(t_1)$ ermittelt ist, setze man

$$\varphi(t_1) = t_1^m + F'_1 t_1^{m-1} + \dots + F'_m,$$

so hat man, zunächst für die der Bedingung

$$\delta' \leq |t_1| \leq \delta_1$$

genügenden Werthe von t_1 ,

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} T'_{\mu+1} t_1^{-\mu-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t'_2, \dots, t'_n) t_1^{-\mu-1},$$

$$mt_1^{m-1} + (m-1)F'_1 t_1^{m-2} + \dots + F'_{m-1} = (t_1^m + F'_1 t_1^{m-1} + \dots + F'_m) \left\{ mt_1^{-1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t'_2, \dots, t'_n) t_1^{-\mu-1} \right\}.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} F'_1 + \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2, \dots, t'_n) &= 0, \\ 2F'_2 + F'_1 \cdot \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2, \dots, t'_n) + \mathfrak{P}^{(-3)}(t'_2, \dots, t'_n) &= 0, \\ 3F'_3 + F'_2 \cdot \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2, \dots, t'_n) + F'_1 \cdot \mathfrak{P}^{(-3)}(t'_2, \dots, t'_n) + \mathfrak{P}^{(-4)}(t'_2, \dots, t'_n) &= 0, \\ \dots &\dots \\ mF'_m + F'_{m-1} \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2, \dots, t'_n) + F'_{m-2} \mathfrak{P}^{(-3)}(t'_2, \dots, t'_n) + \dots + \mathfrak{P}^{(-m-1)}(t'_2, \dots, t'_n) &= 0. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen lassen sich die Grössen $F'_1, \dots, F'_m$ bestimmen. Substituirt man in den Ausdrücken derselben für $t'_2, \dots, t'_n$ die unbestimmten Grössen $t_2, \dots, t_n$, bezeichnet die Potenzreihe von $t_2, \dots, t_n$, in welche F'_μ dadurch übergeht, mit

$$F_\mu(t_2, \dots, t_n)$$

und setzt

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^m + F_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{m-1} + \dots + F_m(t_2, \dots, t_n),$$

so ist durch das Vorstehende bewiesen, dass für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots, t_n)$

$$\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1} = \sum_{v=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(v)}(t_2, \dots, t_n) t_1^v$$

ist. Da aber die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung keine negativen Potenzen von t_1 enthält, so convergirt sie für jedes den Bedingungen C) genügende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, und zwar, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt von den Reihen

$$F_1(t_2, \dots, t_n), \dots, F_m(t_2, \dots, t_n);$$

es besteht somit die vorstehende Gleichung für jedes den zuletzt angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_1, \dots, t_n)$.

Nun hat man, wenn $\alpha > 1$ ist,

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi_1(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial^2 \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \partial t_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots, t_n) t_1^\nu,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} \right\} = \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{t_1^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\partial \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} \right\}.$$

Es lassen sich aber, wenn man $t_1, t_2, \dots, t_n$ wieder den Bedingungen A) unterwirft,

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha}$$

in Reihen von derselben Form, wie die im Vorhergehenden für $\varphi_1(t_1, \dots, t_n)$ angegebene, entwickeln. Die vorstehende Gleichung lehrt nun, dass in der Differenz dieser beiden Reihen Glieder mit einer negativen Potenz von t_1 nicht vorkommen, und dass man

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n) - \varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t_1^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\partial \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n)$ die Summe der von t_1 unabhängigen Glieder der eben erwähnten Entwicklung von $\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n)$ bezeichnet, und $\varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n)$ dieselbe Bedeutung für die Function $\frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha}$ hat. Aus der Form der Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt sich dann wieder, dass die Gleichung für jedes den Bedingungen C) entsprechende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ gilt.

Damit ist bewiesen, dass sich

$$\sum_{\alpha=0}^n \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) dt_\alpha$$

auf die Form

$$d \log \varphi(t_1, \dots, t_n) + \sum_{\alpha=1}^n \mathfrak{P}(t_1, \dots, t_n)_\alpha dt_\alpha$$

bringen lässt. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen genügt dann wieder den Integrabilitätsbedingungen und kann nach dem im zuerst betrachteten Falle Bewiesenen in der Form

$$d \log \mathfrak{P}(t_1, \dots, t_n)$$

dargestellt werden, wobei man $\mathfrak{P}(0, \dots, 0) = 1$ annehmen kann. Folglich ist, wenn man, unter C eine von Null verschiedene, im Übrigen willkürlich

anzunehmende Constante verstehend,

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = C \varphi(t_1, \dots, t_n) \mathfrak{P}(t_1, \dots, t_n)$$

setzt,

$$\sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha}(t_1, \dots, t_n) dt_{\alpha} = d \log \psi(t_1, \dots, t_n).$$

Drückt man nunmehr $t_1, \dots, t_n$ durch $x_1, \dots, x_n$ aus und setzt

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n),$$

so ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} = d \log f(x_1, \dots, x_n).$$

Diese Gleichung gilt nun ihrer Herleitung zufolge für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots, x_n)$. Etwas Bestimmteres über den Convergenzbezirk der Reihe für $f(x_1, \dots, x_n)$ lässt sich durch die gegebene Deduction nicht ermitteln, weil bei derselben nur vorausgesetzt ist, dass die Functionen $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$ innerhalb einer begrenzten Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ überall eindeutig definirt seien und sich wie rationale Functionen verhalten. Gleichwohl reicht der in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Satz aus, um für den Fall, wo die Functionen $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$ sich an allen im Endlichen des Grössengebietes $(x_1, \dots, x_n)$ liegenden Stellen wie rationale Functionen verhalten, das oben ausgesprochene Theorem zu beweisen.

Es sei $(a_1, \dots, a_n)$ ein System bestimmter, endlicher Werthe von $x_1, \dots, x_n$, und man nehme an, es convergire die auf die beschriebene Weise hergeleitete Reihe $f(x_1, \dots, x_n)$ (in der wir uns jetzt für die Constante C einen bestimmten Werth gesetzt denken) für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1|, \dots, |x_n| < |a_n|$$

genügende Werthsystem $(x_1, \dots, x_n)$. — Ferner sei $(a'_1, \dots, a'_n)$ irgend ein bestimmtes Werthsystem, das den Bedingungen

$$|a'_1| = |a_1|, \dots, |a'_n| = |a_n|$$

gemäss, im Übrigen aber beliebig angenommen ist. Dann kann man innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots, a'_n)$

$$f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) \text{ in der Form } \frac{\mathfrak{P}_{\alpha}^{(1)}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)}{\mathfrak{P}_{\alpha}^{(0)}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)}$$

darstellen und nach dem Vorhergehenden eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)$$

herleiten, welche der Gleichung

$$d \log \mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n) = \sum_{\alpha} \frac{\mathfrak{P}_{\alpha}^{(1)}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)}{\mathfrak{P}_{\alpha}^{(0)}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)} dx_{\alpha}$$

genügt. Diese Reihe möge convergiren an allen Stellen, für die

$$|x_1 - a'_1| < \delta, \dots, |x_n - a'_n| < \delta$$

ist, wo δ eine positive Grösse bedeutet. Unter diesen Stellen giebt es nun auch solche — und zwar bilden dieselben ein $2n$ -fach ausgedehntes Continuum —, welche zugleich den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1|, \dots, |x_n| < |a_n|$$

genügen. Innerhalb des Bereiches dieser Stellen hat man also

$$d \log \mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha},$$

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha},$$

$$\frac{d \mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)}{\mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)} = \frac{df(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)},$$

woraus sich, da die Functionen $f(x_1, \dots, x_n)$, $\mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)$ innerhalb des in Rede stehenden Bereichs an allen Stellen sich regulär verhalten,

$$f(x_1, \dots, x_n) = C' \mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \dots, x_n - a'_n)$$

ergiebt, wo C' eine von $x_1, \dots, x_n$ unabhängige Grösse bedeutet. Da dies für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(a'_1, \dots, a'_n)$ gilt, so folgt daraus (nach einem der Sätze, welche in der Functionentheorie in Betreff der Convergenzbedingungen für Potenzreihen entwickelt werden) die Existenz einer positiven Grösse δ' , so beschaffen, dass die Reihe auch noch convergirt für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1| + \delta', \dots, |x_n| < |a_n| + \delta'$$

genügende Werthsystem $(x_1, \dots, x_n)$. Daraus ergiebt sich sofort, dass die Reihe $f(x_1, \dots, x_n)$ für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots, x_n$ convergirt und