Elementare Differentialgeometrie

Christian P. Jäh*

SS 2021

*christian.jaeh@mathematik.uni-goettingen.de

Vorwort

Dieses Skriptum sind Notizen zur Vorlesung *Elementare Differentialgeometrie* die ich im Sommersmester 2021, auch bekannt als das 3. Corona-Semester, an der Universität Rostock gehalten habe.
Die Vorlesung hatte eine 90 Minuten Vorlesung pro Woche. Das Skript enthält ein wenig mehr Informationen als in der Vorlesung besprochen.
Für Hinweise auf Fehler, Verbesserungsvorschläge, mögliche Ergänzungen und ähnliches wäre ich sehr dankbar. Solche Dinge können mir jederzeit per E-Mail unter christian@jaeh.cc mitgeteilt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven im Euklidischen Raum

1.1 Was ist eine Kurve

Als erstes führen wir den Begriff der parametrisierten Kurve ein.

Definition 1.1 (Parametrisierte Kurve)**.**
*Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Eine Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt genau dann **parametrisierte C^k-Kurve** wenn γ eine C^k-Abbildung ist. Das Bild $\gamma(I)$ wird **Spur** von γ genannt; die Variable der Funktion heißt Parameter der Kurve.*
*Wir nennen den Vektor $\gamma'(t)$ **Tangentialvektor** von γ in $\gamma(t)$. Wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, dann heißt γ regulär.*

Auf einer regulären Kurve weiß man immer, in welche Richtung man geht. Weiter ist für reguläre Kurven $\gamma'(t)$ der Richtungsvektor der Tangente an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$.

Wenn wir uns die parametrisierte Kurven

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(t)\,, \sin(t))$$

und

$$\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma} = (\cos(2t)\,, \sin(2t))$$

anschauen, so beschreiben diese die gleiche Kurve, sind aber verschiedene Parametrisierungen.

Das wollen wir nun etwas präzisieren: Dazu brauchen wir zuerst den Begriff des

Definition 1.2 (C^k-Diffeomorphismus)**.**
Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine bijektive Funktion $\varphi\colon J \to I$ heißt C^k-Diffeomorphismus falls sowohl φ als auch φ^{-1} C^k-Funktionen sind.
Ein C^k-Diffeomorphismus zwischen zwei Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ist die Einschränkung eines C^k-Diffeomorphismuses zwischen offenen Umgebungen von I und J.

Definition 1.3 (Umparametrisierung)**.**
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Kurve, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Dann heißt eine C^k-Kurve $\tilde{\gamma}\colon J \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine ***Umparametrisierung*** *der Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, wenn es einen C^k-**Diffeomorphismus** $\varphi\colon J \to I$ mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ gibt.*
Wenn $\varphi' > 0$ auf J, dann heißt die Umparametrisierung ***orientierungserhaltend****.*
Wenn $\varphi' < 0$ auf J, dann heißt die Umparametrisierung ***orientierungsumkehrend****.*
Der Diffeomorphismus wird auch ***Parametertransformation*** *genannt.*

Wir führen durch die Definition der Umparametrisierung eine Äquivalenzrelation ein, d.h. zwei Kurven γ und $\tilde{\gamma}$ werden als äquivalent erklärt, wenn ein Diffeomorphismus φ existiert mit $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Dann können wir Kurven wie folgt definieren:

Definition 1.4 (Kurven)**.**
Eine Kurve γ ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven. Ein Repräsentant $c\colon I \to \mathbb{R}$ heißt eine Parametrisierung dieser Kurve.
Eine Kurve heißt dann regulär, wenn jede Parametrisierung regulär ist.
Zwei Kurven γ und $\tilde{\gamma}$ heißen ***äquivalent mit gleicher Orientierung*** *wenn die Umparametrisierung orientierungserhaltend ist und* ***äquivalent mit umgekehrter Orientierung*** *wenn die Umparametrisierung orientierungsumkehrend ist.*
Eine ***orientierte Kurve*** *ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Kurven mit gleicher Orientierung.*

Damit ist es Aufgabe der Differentialgeometrie von Kurven Eigenschaften von dieser als Äquivalenzklassen zu studierend, d.h. als Eigenschaften von parametrisierten Kurven, die unter Umparametrisierung invariant sind.

Im allgemeinen ist es unschön mit Äquivalenzklassen zu arbeiten, wir werden aber im nächsten Kapitel sehen, daß die Klasse der regulären Kurven erlaubt, auf kanonische Weise eine Parametrisierung zu wählen, mit der sich die Geometrie der Kurve besonders schön untersuchen läßt: die sogenannte Parametrisierung nach Bogenlänge.

1.1.1 Einige Hilfsmittel der linearen Algebra

Definition 1.5 (Starre Bewegungen)**.**
Eine affine Transformation $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *mit* $F(x) = Ax+b$ *für ein* $b \in \mathbb{R}^n$ *und ein* $A \in SO(n)$ *heißt starre Bewegung.*

Bemerkung 1.1.
Solche Abbildungen werden auch eigentlichen Euklidische Bewegungen $E_+(n)$ *genannt bzw. nur Euklidische Bewegung, wenn* $O(n)$ *anstelle von* $SO(n)$ *erlaubt ist.*
Eigentliche Bewegungen erhalten die Orientierung von Kurven, Euklidische Bewegungen können die Orientierung umkehren.

1.2 Länge einer Kurve

Der Kurs heißt Differentialgeometrie, wir werden also geometrische Eigenschaften der Kurven (und später von Flächen) mit Mitteln der Differential- und Integralrechnung untersuchen.

Wir beginnen mit dem Begriff der Kurvenlänge.

Dazu wiederholen wir zuerst die Definition einer Partition.

Definition 1.6 (Partition).
Eine Partition $\mathcal{P}$ von $[a, b]$ ist ein $n+1$-Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_{n-1} < t_n = b.$$

Wenn für ein $\delta > 0$ gilt $|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$ für alle $1 \leq k \leq n$ so heißt $\mathcal{P}$ eine Partition der Feinheit δ. Die Zahl

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$$

heißt minimale Feinheit von $\mathcal{P}$.

Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^k-Kurve, $k \geq 1$, $[a, b] \subseteq I$ und $\mathcal{P}$ eine Partition von $[a, b]$. Dann heißt

$$L_a^b(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2$$

die Länge von γ von a bis b assoziiert zu $\mathcal{P}$.

Definition 1.7 (Länge einer Kurve)**.**
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^k-Kurve, $k \geq 1$, $[a,b] \subseteq I$. Wir setzen dann

$$L_a^b(\gamma) = \sup_{\delta>0}\{L_a^b(\gamma,\mathcal{P}) \colon\ \mathcal{P}\}$$

*als die **Länge der Kurve** γ zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.*
*Wenn $L_a^b(\gamma)$ endlich ist, dann heißt γ **rektifizierbar**.*

Bemerkung 1.2.
Da die Menge der durch $\mathcal{P}$ in γ einbeschriebenen Polygone von nur vom Bild $\gamma(I)$ abhängt, hängt sie nur von der Äquivalenzklasse von γ ab und die Definition $L_a^b(\gamma)$ ist von gewählten Repräsentanten unabhängig.

Bemerkung 1.3.
Ist dies ein guter Begriff von Länge? Als erstes sollten wir uns überlegen, ob dieser Längenbegriff invariant ist unter den starren Bewegungen (siehe Definition) von $\mathbb{R}^n$. Wieso diesen? Weil das die Symmetriegruppe ist, die die Bausteine, Streckensegmente, invariant läßt. Sei also $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = v + Ax$ mit $A \in \mathsf{SO}(n)$:

$$\begin{aligned}
L_a^b(T(\gamma),\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{n} \|T(\gamma)(t_k) - T(\gamma)(t_{k-1})\|_2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big\|T(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))\big\|_2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 .
\end{aligned}$$

Satz 1.1.
Für jede parametrisierte C^k-Kurve γ gilt: Für alle $[a,b] \subseteq I$, für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t - L_a^b(\gamma, \mathcal{P}) \right| < \varepsilon$$

für alle Partitionen $\mathcal{P}$ von $[a,b]$ mit maximaler Feinheit $\leq \delta$.

Korollar 1.1.
Jede parametrisierte C^k-Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L_a^b(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Definition 1.8 (Parametrisierung nach Bogenlänge)**.**
Wir sagen eine parametrisierte C^k-Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ is parametrisiert nach Bogenlänge, wenn $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in I$.

Bemerkung 1.4.
Für nach Bogenlänge parametrisierte C^k-Kurven gilt natürlich

$$L_a^b(\gamma) = b - a$$

für alle $[a,b] \subseteq I$.

Übungsaufgabe 1.1.
Zeigen Sie, daß für $P, Q \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige kürzeste Kurve, die P mit Q verbindet, das Geradensegment ist.

Nach Definition sind nach Bogenlänge parametrisierte Kurven regulär. Grundlage unserer weiteren Untersuchen ist daß auch die Umkehrung gilt.

Satz 1.2.
Für jede reguläre orientierte Kurve existiert eine bis auf Translation des Parameters eindeutige Parametrisierung nach Bogenlänge.
Genauer: Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein Repräsentant der Kurve γ und $t_0 \in I$. Weiter sei $s\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s(t) = L_{t_0}^{t}(\gamma)$. Dann ist die Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ die (bis auf Translation des Parameters) eindeutige nach Bogenlänge parametrisierte reguläre parametrisierte C^k-Kurve die äquivalent mit gleicher Orientierung zu γ ist.

Übungsaufgabe 1.2.
Zeigen Sie durch die Berechnung von s für die Ellipse $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, $b > a > 0$, daß die Berechnung von s^{-1}, also der Parametrisierung nach der Bogenlänge nicht immer einfach möglich ist.

1.3 Krümmung und Torsion

Wir beginnen unsere Diskussion mit den Spezialfällen ebener und Räumlicher Kurven.

1.3.1 Ebene Kurven

Eine **ebene (parametrisierte) Kurve** sei eine (parametrisierte) Kurve mit Bildbereich $\mathbb{R}^2$. Natürlich läßt sich auch sagen: Eine (parametrisierte) Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt eine ebene (parametrisierte) Kurve, wenn eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}$ existiert mit $\gamma(I) \subseteq E$ und eine starre Bewegung A mit $A \circ \gamma$ nimmt die Form

$$A \circ \gamma(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t), 0, \dots, 0)$$

an. Wir formulieren hier alles in $\mathbb{R}^2$. Im Fall räumlicher Kurven werden wir zusätzlich ein Kriterium finden um zu sehen, wann γ eine ebene Kurve ist.

Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^k-Kurve, $k \geq 2$. Wir können dann die Funktion $n\colon I \to \mathbb{R}^2$ durch

$$n(t) = J\gamma'(t), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

definieren. Die Matrix J ist eine Drehmatrix, die Vektoren in $\mathbb{R}^2$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht. Damit gilt natürlich

$$\forall t \in I\colon \quad \langle n(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle = 0$$

Weiterhin bildet $(n(t), \gamma'(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^2$ für alle $t \in I$, d.h.

$$\begin{aligned} \forall t \in I\colon \quad \det(\gamma'(t), n(t)) &= \left| \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) & -\gamma_2'(t) \\ \gamma_2(t) & \gamma_1'(t) \end{bmatrix} \right| \\ &= (\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t)) = \|\gamma'(t)\|_2^2 = 1. \end{aligned}$$

Man nennt n auch das **Normalenfeld** der Kurve γ.

Wir erwarten nun, daß $n'(t)$ bzw. $\gamma''(t)$ geometrische Informationen tragen und wollen uns diese verschaffen.

Welche geometrische Beziehung hat $\gamma''(t)$ zu $\gamma'(t)$? Da wir durch die Parametrisierung nach der Bogenlänge

$$\forall t \in I\colon \quad \langle \gamma'(t)\,,\,\gamma'(t)\rangle = 1$$

haben, können wir einmal differenzieren und erhalten nach der Produktregel

$$\forall t \in I\colon \quad 2\langle \gamma''(t)\,,\,\gamma'(t)\rangle = 0$$

womit wir erhalten, daß $\gamma''(t) \perp \gamma'(t)$ für alle $t \in I$. Damit ergibt sich wiederum, da $(\gamma'(t), n(t))$ eine ONB für alle $t \in I$ bildet, daß

$$\forall t \in I\colon \quad \gamma''(t) \parallel n(t).$$

Folglich existiert eine C^{k-2}-Funktion $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ (wenn wir γ als C^k voraussetzten, $k \geq 2$ brauchen wir ja mindestens) mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t)n(t). \tag{1.3.1}$$

Diese Funktion nennen wir die **(orientierte) Krümmung** von γ.

Übungsaufgabe 1.3.
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve und γ_1 und γ_2 zwei Parametrisierungen von γ nach der Bogenlänge. Zeigen Sie, daß die Definition der Krümmung nicht von der Wahl des Startpunktes in der Parametrisierung nach der Bogenlänge abhängt.

Übungsaufgabe 1.4.
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und zeigen Sie, daß die Krümmung invariant ist unter starren Bewegungen des $\mathbb{R}^2$. (Was passiert wenn man in Definition 1.5 auch $O(n)$ zuläßt?)

Die Krümmung ist ein Maß für die Abweichung der Kurve γ von einer Geraden bzw. wie stark die Kurve sich in der Nähe des Punktes $\gamma(t)$ von der Kurve nach rechts (im Uhrzeigersinn) mit $\kappa(t) > 0$ oder nach links (entgegen dem Uhrzeigersinn) mit $\kappa(t) < 0$ von der Tangente in $\gamma(t)$ wegstrebt.

Präzisieren wir dies durch Rechnung:

Beispiel 1.1.
Sei

$$\begin{cases} \gamma\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \mapsto & \gamma(t) = vt + v_0. \end{cases}$$

die Gerade durch $v_0 \in \mathbb{R}^2$ *in Richtung* $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|_2 = 1$ *(Parametrisierung nach der Bogenlänge). Da* $\gamma'(t) = v$ *für alle* $t \in I$ *gilt* $\gamma'' \equiv 0$ *und damit* $\kappa \equiv 0$.

Beispiel 1.2.
Gegeben sei ein Kreis mit Zentrum (x_0, y_0) *nach der Bogenlänge parametrisiert durch*

$$\begin{cases} \gamma\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \mapsto & \gamma(t) = \big(r\cos(\frac{t}{r}), \sin(\frac{t}{r})\big). \end{cases}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(-\sin(\frac{t}{r}), \cos(\frac{t}{r})\right), \\ n(t) &= (-\cos(\frac{t}{r}), -\sin(\frac{t}{r})) \quad \textit{und} \\ \gamma''(t) &= \left(-\frac{1}{r}\cos(\frac{t}{r}), -\frac{1}{r}\sin(\frac{t}{r})\right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\gamma''(t) = \kappa(t)n(t)$ *für* $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

Beispiel 1.3. *In diesem Beispiel wollen wir die Krümmung eines Kreises, parametrisiert nach der Bogenlänge ausrechnen. Wir haben die Kurve*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = \Big(r \cos\big(\frac{t}{r}\big)\,,\, r \sin\big(\frac{t}{r}\big)\Big) \in \mathbb{R}^2.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \Big(-\sin\big(\frac{t}{r}\big)\,,\, \cos\big(\frac{t}{r}\big)\Big)\\
\gamma''(t) &= \Big(-\frac{1}{r}\cos\big(\frac{t}{r}\big)\,,\, -\frac{1}{r}\sin\big(\frac{t}{r}\big)\Big)\\
n(t) &= \Big(-\cos\big(\frac{t}{r}\big)\,,\, -\sin\big(\frac{t}{r}\big)\Big)
\end{aligned}$$

Folglich gilt mit $\kappa(t) = \frac{1}{r}$ das $n(t) = \kappa(t)\gamma''(t)$.

Der Nächste Satz sagt nun aus, daß Geraden und Kreisstücke die einzigen Kurvenstücke mit konstanter Krümmung sind.

Satz 1.3.
Sei $\gamma I \to \mathbb{R}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Es gilt $\kappa \equiv const$ genau dann, wenn die Kurve γ Teilstück eines Kreises mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ ist im Falle $\kappa \neq 0$ oder einer Geraden im Falle $\kappa = 0$ ist.

Übungsaufgabe 1.5.
Beweisen Sie die verbliebenen Punkte von Satz 1.3.

Trägt $t \mapsto n'(t)$ weitere Information? Da γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist gilt

$$\begin{aligned}
\forall t \in I\colon \langle n(t)\,,\, n(t)\rangle &= \langle J\gamma'(t)\,,\, J\gamma'(t)\rangle\\
&= \langle \gamma'(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle = 1
\end{aligned}$$

da $J \in SO(2)$. Also gilt, wieder durch differenzieren, daß $n'(t) \perp n(t)$ für alle $t \in I$ und damit

$$\forall t \in I\colon \quad n'(t) \parallel \gamma'(t).$$

Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ die resultierende Funktion, so daß

$$\forall t \in I\colon \quad n'(t) = \alpha(t)\gamma'(t)$$

gilt. Da nun $(\gamma'(t), n(t))$ für alle $t \in I$ eine ONB des $\mathbb{R}^2$ bilden, haben wir

$$\begin{aligned} n'(t) &= \langle n'(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle\gamma'(t) + \langle n'(t)\,,\, n(t)\rangle n'(t) \\ &= \langle n'(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle\gamma'(t) = \alpha(t)\gamma'(t). \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir $\langle n(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle = 0$ und erhalten durch differenzieren

$$\frac{d}{dt}\langle n(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle = \underbrace{\langle n'(t), \gamma'(t)\rangle}_{=\alpha(t)} + \langle n(t)\,,\, \gamma''(t)\rangle = 0 \tag{1.3.2}$$

Da die Funktion $t \mapsto \langle n(t)\,,\, \gamma''(t)\rangle$ nach (1.3.1) gerade κ ist ergibt sich aus (1.3.2) dann $\alpha(t) = -\kappa(t)$. Damit haben wir keine weitere Information gewonnen. Wir fassen das bisher gezeigte in einem Satz zusammen.

Satz 1.4 (Frenet-Gleichungen)**.**
Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine C^k-Kurve mit (orientierter) Krümmung $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen und der Festsetzung $\gamma' = v$

$$\forall t \in I\colon \left\{ \begin{array}{rcl} v'(t) & = & \kappa(t)n(t) \\ n'(t) & = & -\kappa(t)v(t) \end{array} \right.$$

Wir formulieren nun einen Satz, der unsere Intuition bestätigt, daß ein ebene Kurve durch das vorschreiben ihrer Krümmung im wesentlichen (bis auf starre Bewegungen) eindeutig festgelegt ist.

Satz 1.5.
Sei $\kappa_0\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert eine bis auf eine

starre Bewegung eindeutig bestimmte nach Bogenlänge parametrisierte C^{k+2}-Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa = \kappa_0$.

Beweis. Sei $[v_0, n_0] \in \mathbb{R}^2$ so, daß (v_0, n_0) eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Wir betrachten d4nn das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) &= A_0(t)x(t) \\ x(0) &= [v_0, n_0] \end{cases}$$

mit

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa_0(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_0(t) \\ -\kappa_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_0(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da κ_0 mindestens stetig ist, existiert nach bekannten Sätzen zu Systemen linearer Differentialgleichungen eine eindeutig bestimmte Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}^4$. Die gesuchte Kurve ist dann

$$\gamma(t) = \Big(\int_0^t x_1(\tau)\,\mathsf{d}\tau,\ \int_0^t x_2(\tau)\,\mathsf{d}\tau \Big)^T.$$

Genauer wissen wir, daß
Wir zeigen zuerst, daß γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. $\gamma'(t)$ ist nach Konstruktion natürlich durch $\gamma'(t) = (x_1(t)\,,\, x_2(t))^T$ gegeben. □

Es wäre schön, wenn wir zur Berechnung der Krümmung einer Kurve nicht erst die Parametrisierung nach der Bogenlänge ausrechnen müßten, somal dies nicht immer einfach möglich ist.

Satz 1.6.
Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Dann ist die

Krümmung $\kappa I \to [0, \infty)$ *gegeben durch*

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'\|_2^2 \|\gamma''\|_2^2 - |\langle \gamma'' , \gamma' \rangle|}}{\|\gamma'\|_2^3}.$$

1.3.2 Räumliche Kurven

Nun betrachten wir (nach Bogenlänge) parametrisierte Kurven $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$. [1]

1.4 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^k-Kurve, $k \geq 2$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma'(t)\,,\,\gamma'(t)\rangle = 2\langle \gamma''(t)\,,\,\gamma'(t)\rangle = 0$$

also $\gamma''(t) \perp \gamma'(t)$ für alle $t \in I$. Wir können diese Vektoren zu einer ONB von $\mathbb{R}^n$ erweitern. Wenn weitere Ableitungen von γ existieren und diese linear unabhängig sind, dann können wir diese dazu verwenden. Das ist eine sinnvolle Frage da, wie wir zuvor gesehen haben, diese Größen geometrische Informationen der Kurve tragen.

Satz 1.7.
Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Kurve $k \geq n$ und die Menge

$$\{\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)\}$$

sei linear unabhängig für alle $t \in I$. Dann existieren eindeutig bestimmte parametrisierte C^1-Kurven $e_i\colon I \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $t \in I$ ist $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem von $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle e_i(t)\,,\,e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ und

$$\det[e_1(t)| \dots |e_n(t)] > 0.$$

(ii) Für jedes $t \in I$ und jedes $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\operatorname{span}\{e_1(t), \dots, e_k(t)\} = \operatorname{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)\}$$

und

$$\langle e_k(t)\,,\,\gamma^{(k)}(t)\rangle > 0.$$

Definition 1.9 (Begleitendes n-Bein)**.**
Sei γ eine Kurve wie in Theorem 1.7. Das Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ in Theorem 1.7 wird dann als das ***begleitende n-Bein*** *zu γ genannt.*

Beweis. Zuerst beweisen wir die algebraischen Eigenschaften in (i) und (ii) und dann zeigen wir die Differenzierbarkeit von e_n, die von $e_1, \ldots, e_{n-1}$ wird aus der Konstruktion offensichtlich sein und am Ende zeigen wir die Eindeutigkeit der $e_1, \ldots, e_n$.
Um die Funktionen $e_1, \ldots e_n$ zu konstruieren benutzen wir das aus der Linearen Algebra bekannte **Gram-Schmidt-Verfahren**. Wir setzen

$$e_1(t) := \frac{\gamma^{(1)}(t)}{\|\gamma^{(1)}(t)\|_2}$$

und dann induktiv

$$2 \leq k \leq n-1\colon \quad f_k(t) := \gamma^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, e_i(t) \rangle e_i(t). \tag{1.4.1}$$

Die Funktionen $e_2, \ldots, e_{n-1}$ erhalten wir dann durch Normalisierung

$$2 \leq k \leq n-1\colon \quad e_k(t) = \frac{f_k(t)}{\|f_k(t)\|_2}.$$

Die Normalisierung ist möglich, da $f_k(t) \neq 0$ für alle $2 \leq k \leq n-1$ und $t \in I$ da

$$\gamma^{(k)}(t) \notin \operatorname{span}\{\gamma^{(1)}(t), \ldots, \gamma^{(k)}(t)\} = \operatorname{span}\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}.$$

Zuletzt wählen wir $e_n(t)$ im orthogonalen Komplement

$$\operatorname{span}\{e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t)\}^{\perp}$$

so, daß

$$\forall t \in I\colon \quad \|e_n(t)\|_2 = 1 \quad \text{und} \quad \det(e_1(t)| \ldots |e_n(t)) > 0.$$

Nach Konstruktion (Gram-Schmidt) erhalten wir so ein positiv orientiertes Orthonormalsystem, wie in (i) gefordert. Die Eigenschaft

$$\mathrm{span}\{e_1(t), \dots, e_k(t)\} = \mathrm{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)\}$$

folgt ebenfalls aus der Konstruktion. Wir zeigen nun, daß $\langle e_k(t)\,,\,\gamma^{(k)}(t)\rangle > 0$ für alle $t \in I$ gilt. Für jedes $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\gamma^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{k} \langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, e_i(t)\rangle e_i(t)$$

und damit nach (1.4.1)

$$f_k(t) = \langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, e_k(t)\rangle e_k(t).$$

also

$$\begin{aligned}
\langle e_k(t)\,,\,\gamma^{(k)}(t)\rangle &= \frac{1}{\|f_k(t)\|_2}\langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, f_k(t)\rangle \\
&= \frac{1}{\|f_k(t)\|_2}\left\langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, \langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, e_k(t)\rangle e_k(t)\right\rangle \\
&= \frac{1}{\|f_k(t)\|_2}(\langle \gamma^{(k)}(t)\,,\, e_k(t)\rangle)^2 > 0
\end{aligned}$$

Nach dem algebraischen Teil von (i) gilt $MM^T = I_n$ und $\det(M) = 1$. Damit gilt auch $M = (M^T)^{-1}$ und M ist die Adjunkte zu M^T (auch komplementäre Matrix, siehe bspw. [2] in Sektion 3.3) Damit ist die letzte Spalte von M zusammengesetzt aus Determinanten der Minoren von $[e_1(t)| \dots |e_{n-1}(t)]$. Determinanten sind Polynomiale Funktionen in den Komponenten der Vektoren $e_1(t), \dots, e_{n-1(t)}$ und damit stetig differenzierbar. Nach Konstruktion sind alle $e_1, \dots, e_{n-1}$ mindestens C^1 und damit ist $t \mapsto e_n(t)$ auch mindestens C^1.
Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien also $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ ein weiterer Satz Kurven $I \to \mathbb{R}^n$ mit den angegebenen Eigenschaften. Aus (ii) folgt für $k = 1$, daß $\tilde{e}_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|_2}$ also $\tilde{e}_1(t) = e_1(t)$ für alle $t \in I$ gilt. Induktiv erhalten wir dann aus (ii) weiterhin $\tilde{e_k}(t) = e_k(t)$ für alle $t \in I$ und alle $2 \leq k \leq n-1$. Aus Teil (i) folgt dann $\tilde{e}_n(t) = e_n(t)$ für alle $t \in I$. $\square$

Definition 1.10 (Frenet-Kurven).
Eine parametrisierte C^k-Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, $k \geq n$, heißt per Definition genau dann ***Frenet-Kurve****, wenn*

(i) $k \geq n$, *und*

(ii) *für alle $t \in I$ ist die Menge $\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)\}$ linear unabhängig.*

Bemerkung 1.5.
Für $1 \leq k \leq n-1$ nennt man den affinen Raum

$$\gamma(t) + \mathrm{span}\{\gamma^{(t)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)\}$$

den k-ten Schmiegeraum von γ. Die Bedingung (ii) in Definition 1.10 stellt sicher, daß der k-te Schmiegeraum stets Dimension k hat.

Satz 1.8 (Frenet-Gleichungen).
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve mit begleitendem n-Bein $(e_1, \dots, e_n)$. Dann gelten mit den C^{n-1-i}-Funktionen

$$1 \leq i \leq n-1\colon \quad \begin{cases} \omega_i\colon I & \to & \mathbb{R} \\ \quad t & \mapsto & \omega_i(t) = \langle e_i'(t), e_{i+1}(t)\rangle \end{cases}$$

die ***Frenet-Gleichungen***

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1}' \\ e_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 I_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\omega_1 I_n & 0 & \omega_2 I_n & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\omega_2 I_n & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \omega_{n-1} I_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\omega_{n-1} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n. \end{bmatrix}$$

Die C^{n-1-i}-Funktionen

$$1 \leq i \leq n-1\colon \quad \begin{cases} \kappa_i\colon I & \to \quad \mathbb{R} \\ \quad\; t & \mapsto \quad \kappa_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{\|\gamma'(t)\|_2} \end{cases}$$

heißen die i-te Frenet-Krümmung. Für $1 \leq i \leq n-2$ gilt $\kappa_i(t) > 0$ für alle $t \in I$.

Bemerkung 1.6.
Ist γ in Satz 1.8 nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\kappa_i = \langle e_i', e_{i+1}\rangle$ für $1 \leq i \leq n-1$. Die $n-1$-te Frenet-Krümmung wird auch als ***Torsion*** *bezeichnet und die 1. Frenet-Krümmung auch nur als Krümmung, insbesondere, wenn $n = 2$.*
Wir hatten im Falle von Raumkurven schon gesehen, was die Torsion bedeutet. Dies überträgt sich natürlich hier. Die Torsion ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve aus dem Schmiegeraum

$$\gamma(t) + \operatorname{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)\}, \tag{1.4.2}$$

in Richtung e_n, herausstrebt.

Übungsaufgabe 1.6.
Zeigen Sie, daß starre Bewegungen (siehe Definition 1.5) die Frenet-Krümmungen in Satz 1.8 invariant lassen.

Beweis. Da die $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ für alle $t \in I$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bilden gilt

$$e_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i'(t), e_j(t)\rangle \, e_j(t).$$

Daraus ergeben sich die Koeffizienten der Matrix in der Frenet-Formel.
Da für $1 \leq i \leq n-1$ gilt $e_i(t) \in \operatorname{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)\}$, d.h.

$$e_i(t) = \sum_{j=1}^{i} a_j(t)\gamma^{(j)}(t),$$

für geeignete $a_j \colon I \to \mathbb{R}$, folgt mit der Produktregel

$$e_i'(t) \in \operatorname{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(i+1)}(t)\} = \operatorname{span}\{e_1(t), \dots, e_{i+1}(t)\}.$$

Damit gilt $\langle e_i(t)\,,\, e_j(t)\rangle = 0$ für $i+2 \leq j \leq n$. Da $\langle e_i(t)\,,\, e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in I$, folgt

$$\frac{d}{dt}\langle e_i(t)\,,\, e_j(t)\rangle = \langle e_i'(t)\,,\, e_j(t)\rangle + \langle e_i(t)\,,\, e_j'(t)\rangle = 0 \tag{1.4.3}$$

also $\langle e_i'(t)\,,\, e_j(t)\rangle = -\langle e_i(t)\,,\, e_j'(t)\rangle$ und insbesondere $\langle e_i'(t)\,,\, e_i(t)\rangle = 0$. Damit haben wir die Schiefsymmetrie und die 0en der Matrix. Wenn wir nun noch $\omega_i(t) = \langle e_i'(t), e_{i+1}(t)\rangle$ setzen, dann haben wir die Frenet-Formel. Da e_i, $1 \leq i \leq n-1$ mindestens von der Klasse C^{n-i} ist (Beweis Satz 1.7), sind e_i', ω_i und κ_i mindestens von der Klasse C^{n-i-1}.
Es bleibt noch zu zeigen, daß $\kappa_i(t) > 0$ für alle $t \in I$ und $1 \leq i \leq n-2$. Es gilt für $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} e_i(t) &= \frac{\gamma^{(i)}(t)}{\|f_i(t)\|_2} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i(t)\,,\, e_k(t)\rangle}{\|f_i(t)\|_2} e_k(t) \\ &= \frac{\gamma^{(i)}(t)}{\|f_i(t)\|_2} + \sum_{k=1}^{i-1} a_k(t)\gamma^{(k)}(t) \end{aligned}$$

für geeignete $a_k \colon I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i-1$, wegen unserer Formeln für e_i aus Satz 1.7 und (ii) aus dem gleichen Satz. Damit haben wir

$$e_i'(t) = \frac{\gamma^{(i+1)}(t)}{\|f_i(t)\|_2} + \sum_{k=1}^{i} b_k(t)\gamma^{(k)}(t)$$

für geeignete $b_i \colon I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq i$. Es gilt nun

$$\sum_{k=1}^{i} b_k(t)\gamma^{(k)}(t) \in \operatorname{span}\{e_1(t), \dots, e_i(t)\}$$

und

$$\sum_{k=1}^{i} b_k(t)\gamma^{(k)}(t) \perp e_i(t).$$

Damit gilt dann

$$\langle e_i'(t)\,,\,e_{i+1}(t)\rangle = \left\langle \frac{\gamma^{(i+1)}(t)}{\|f_i(t)\|_2}\,,\,e_{i+1}(t)\right\rangle = \frac{\langle\gamma^{(i+1)}(t)\,,\,e_{i+1}(t)\rangle}{\|f_i(t)\|_2} > 0$$

nach (ii) von Satz 1.7. □

Satz 1.9. *Sein $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve mit begleitendem n-Bein $(e_1, \dots, e_n)$ sowie den Frenet-Krümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\gamma(I) \subseteq H$ für eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Normalenvektor e_n.

(ii) Es gilt $e_n \equiv const.$.

(iii) Es gilt $\kappa_{n-1} \equiv 0$.

Beweis. Nach Satz 1.8 gilt

$$e_n'(t) = -\omega_n(t)e_{n-1}(t) = -\kappa_{n-1}(t)\|\gamma'(t)\|_2 e_{n-1}(t).$$

Damit ist offensichtlich, daß (ii) ⇔ (iii).
Wir zeigen jetzt noch die Äquivalenz von (i) und (ii).

⇒ Es gelte $\gamma(I) \subseteq H = v_0 + U$ für eine $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und einen $n-1$-dim. Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Es gilt dann $\gamma'(t) \in U$ für alle $t \in I$ und weiterhin $\gamma^{(i)}(t) \in U$ für $2 \leq i \leq n-1$ und $t \in I$. Damit gilt

$$\forall t \in I\colon \quad \mathrm{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)\} \subseteq U.$$

Aus Dimensionsgünden (und (ii) in Definition 1.10) gilt

$$\mathrm{span}\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)\} = U$$

und nach Satz 1.7

$$\forall t \in I\colon \quad U = \mathrm{span}\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}.$$

Der Vektor $e_n(t)$ ist damit konstant, da $e_n(t) \in U^\perp$ für alle $t \in I$.

$\Leftarrow$ Wenn $e_n \equiv v_0$ für ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$ also $e_n'(t) = 0$ für $t \in I$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma(t)\,,\, v_0\rangle = \langle \gamma'(t)\,,\, v_0\rangle$$

Da $\gamma'(t) \in \operatorname{span}\{e_1(t)\}$ und $e_1(t) \perp v_0$ für alle $t \in I$ nach Definition der e_i, $1 \leq i \leq n$, gilt nun

$$\langle \gamma'(t)\,,\, v_0\rangle = 0.$$

Damit gilt, daß $\langle \gamma(t)\,,\, v_0\rangle \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dies heißt aber nichts anderes als

$$\gamma(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x\,,\, e_n\rangle = c\} = \gamma(t) + e_n^{\perp}.$$

$\square$

Satz 1.10 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\kappa_i \colon I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n-1$ seien $C^{n-1-i+k}$-Funktionen, $k \geq 0$, mit $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$ auf I. Weiterhin sei $t_0 \in I$ und $v_0 \in \mathbb{R}^n$ sowie $(b_1, \dots, b_n)$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem von $\mathbb{R}^n$.
Dann existiert genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^{n+k}-Frenet-Kurve $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ mit

(i) $\gamma(t_0) = v_0$,

(ii) $(b_1, \dots, b_n)$ *ist das begleitende n-Bein von γ im Punkt $\gamma(t_0)$.*

(iii) $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ *sind die Frenet-Krümmungen von γ.*

Beweis. Als erstes werden wir das begleitende n-Bein $(e_1, \dots, e_n)$ der Kurve konstruieren, dies natürlich mit Hilfe der Frenet-Gleichung, und danach die Kurve aus e_1.
Wir setzen $E(t) = [e_1(t)| \dots |e_n(t)]^T$. Da die $(e_1, \dots, e_n)$ ein positiv orientiertes

orthonormales n-Bein bilden ist $E(t)$ stets orthogonal und es gilt $\det(E(t)) = 1$ für alle $t \in I$. Die Frenet-Gleichung ist damit äquivalent zu $E'(t) = K(t)E(t)$ mit

$$K(t) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Nach bekannten Existenz- un Eindeutigkeitssätzen für gew. Differentialgleichungssysteme hat das Differentialgleichungssystem $E' = K(t)E$ nun für den gegeben Anfangswert

$$E(t_0) = [b_1| \dots b_n]^T$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $E\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} (E(t)E(T)^T)' &= E'(t)E(T)^T + E(t)(E(t)^T)' \\ &= E'(t)E(T)^T + E(t)E'(t)^T \\ &= K(t)E(t)E(T)^T + E(t)E(T)^T K(t)^T. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Zu der Anfangsbedingung $E(t_0)E(t_0)^T = I_n$ hat das System obige System nun auch genau eine Lösung. Da K schiefsymmetrisch ist, gilt $K(t)^T + K(t) = 0$ und damit ist $E(t) = I_n$ eine Lösung von (1.4.4). Auf Grund der Eindeutigkeit gilt nun $E(t)E(t)^T = I_n$ für alle $t \in I$. Damit ist $E(t) \in SO(n)$ für alle $t \in I$ da die Determinante stetig ist und $\det E(t_0) = 1$ gilt.
Die erste Spalte der Matrix $E(t)$ legt nun für jedes $t \in I$ eine Kurve $e_1 : I \to \mathbb{R}^n$ fest. Um eine Kurve γ, parametrisiert nach der Bogenlänge zu erhalten, lösen wir

$$\gamma'(t) = e_1(t).$$

Auch diese Differentialgleichung hat, nach Festlegung der Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = v_0$, eine Eindeutige Lösung

$$\gamma(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Nach Konstruktion ist γ wie gesagt nach Bogenlänge parametrisiert und von der Klasse C^{n+k} da e_1 von der Klasse C^{n-1+k} (weil $\kappa_1 \in C^{n-2+k}$). Nach Konstruktion gilt weiter $\gamma''(t) = e_1'(t) = \kappa_1 e_2$ und

$$\begin{aligned}\gamma^{(3)}(t) &= \kappa_1(t)e_2'(t) + \kappa_1'(t)e_2(t) \\ &= \kappa_1(t)(\kappa_2(t)e_3(t) - \kappa_1 e_1(t)) \\ &\in \kappa_1(t)\kappa_2(t)e_3(t) + \mathsf{span}\{e_1(t), e_2(t)\}.\end{aligned}$$

Per Induktion erhalten wir dann für $1 \leq i \leq n-1$

$$\gamma^{(i)}(t) \in \kappa_1(t)\kappa_2(t) \cdot \ldots \cdot \kappa_{i-2}(t)e_i(t) + \mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_{i-1}(t)\}$$

und $\langle \gamma^{(i)}(t)\,,\, e_i(t)\rangle > 0$ für $t \in I$. Damit ist $(e_1, \ldots, e_n)$ das begleitende n-Bein in γ. Da $E(t)$ die Differentialgleichung $E'(t) = K(t)E(t)$ erfüllt, gilt $\langle e_i'(t)\,,\, e_{i+1}(t)\rangle = \kappa_i(t)$ für $1 \leq i \leq n-1$. Damit sind $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ die Frenet-Krümmungen von γ. $\square$

Wir haben schon diskutiert, daß die beste Art von Eindeutigkeit die wir für Kurven erwarten können ist modulo starrer Bewegungen. Wir wollen das im kommenden Satz noch einmal festhalten.

Korollar 1.2.
Es seien $\gamma, \tilde{\gamma} \colon I \to \mathbb{R}^n$ zwei nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurven. Dann haben γ und $\tilde{\gamma}$ genau dann gleiche Frenet-Krümmungen, wenn eine starre Bewegung $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert mit $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$.

Beweis. Aus $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ folgt die Gleichheit der Frenet-Krümmungen von γ_1 und γ_2. Sie Übung 1.6.
Seien nun $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ die gemeinsamen Frenet-Krümmungen von γ und $\tilde{\gamma}$ und seien $(e_1, \dots, e_n)$ bzw. $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ die begleitenden n-Beine von γ und $\tilde{\gamma}$ und sei weiter $t_0 \in I$.
Mit A bezeichnen wir die Matrix, mit $Ae_i(t_0) = \tilde{e}_i(t_0)$ für $1 \leq i \leq n$ und $\det(A) = 1$. Da die e_i und die $\tilde{e}_i$ ein positiv orientierte ONS bilden, ist A orthogonal, also $A \in SO(n)$.
Aus den Frenet-Gleichungen

$$e_i'(t) = -\kappa_{i-1}(t) e_{i-1}(t) + \kappa_i(t) e_{i+1}(t)$$

folgt

$$Ae_i'(t) = -\kappa_{i-1}(t) Ae_{i-1}(t) + \kappa_i(t) Ae_{i+1}(t).$$

Damit ist neben $[\tilde{e}_1 | \dots | \tilde{e}_n]$ auch $[Ae_1 | \dots | Ae_n]$ eine Lösung der Frenet-Gleichungen mit $\omega_i = \kappa_i$, $1 \leq i \leq n-1$ und beide n-Beine stimmen in t_0 überein.
Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen folgt $Ae_i(t) = \tilde{e}_i(t)$ für alle $t \in I$ und $1 \leq i \leq n$. Insbesondere also

$$\forall t \in I\colon \quad A\gamma'(t) = Ae_1(t) = \tilde{e}_1(t) = \tilde{\gamma}'(t).$$

Also

$$\forall t \in I\colon \quad A\gamma(t) - A\gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t} A\gamma'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \tilde{\gamma}'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t_0).$$

Mit $v_0 := \tilde{\gamma}(t_0) - A\gamma(t_0)$ gilt $\tilde{\gamma}(t) = A\gamma(t) + v_0$ für alle $t \in I$. Damit gilt $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ mit $F(x) = Ax + v_0$.
Die starre Bewegung F ist eindeutig festgelegt: Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Mx + w_0$ eine starre Bewegung mit $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, so folgt $Me_i(t) = \tilde{e}_(t)$ für alle $t \in I$. Es folgt dann $M = A$ da $\tilde{e}_i(t_0) = e_i(t_0)$, $1 \leq i \leq n$. Da

$$\tilde{\gamma}(t_0) = f(\gamma(t_0)) = A\gamma(t_0) + w_0$$

folgt auch $w_0 = v_0$ also $f = F$. $\square$

1.5 Anwendungen in der Mechanik

Zuerst ein paar kinematische Überlegungen. Wir interpretieren eine parametrisierte Kurve $x\colon I \to \mathbb{R}^2$ als Bahnkurve eines Massenpunktes $x(t)$. Damit sind $x'(t) =: v(t)$ und $x''(t) := a(t)$ in natürlicher Weise als Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren interpretiert.
Das begleitende Frenet-Dreibein is dann das an die Bewegung des Massenpunktes am besten angepaßte Bezugssystem. Der Beschleunigungsvektor $a(t)$ liegt stets in der Schmiegeebene span$(x'(t), x''(t))$ und für die tangentialen und normalen Komponenten $a_T(t)$, $a_N(t)$ gilt

$$a(t) = a_T T(t) + a_N(t) N(t)$$

mit

$$T(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|_2}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|_2}.$$

Die Koordinaten a_T und a_N werden Tangential- oder Bahnbeschleunigung und Normal- oder Zentripetalbeschleunigung genannt. Es gilt

$$a_T = \langle a(t)\, , \, T(t) \rangle = \frac{\langle x'(t)\, , \, x''(t) \rangle}{\|x'(t)\|_2} = \frac{d}{dt} \|x'(t)\|_2$$

und

$$a_N = \langle a(t)\, , \, N(t) \rangle = \kappa(t) \|v(t)\|_2^2$$

da

$$x'(t) = \|v(t)\|_2 T(t) \quad \text{und} \quad \kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|_2}{\|x'(t)\|_2}.$$

Nun noch etwas Himmelsmechanik. Dazu den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 1.1 (Leibniz Sektorformel)**.**
Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve. Dann hat der vom Strahl $\gamma(t)$ für $t \in [a,b]$ überstrichene Sektor den (orientierten) Flächeninhalt

$$I_a^b(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_a^b \langle \gamma(t)\,,\, J\gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t$$

Der Integrand

$$c(t) := -\langle \gamma(t)\,,\, J\gamma'(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\right)$$

wird auch Flächengeschwindigkeit genannt. Es ist

$$c'(t) = \frac{1}{2}\left(\gamma_1(t)\gamma_2''(t) - \gamma_2(t)\gamma_1''(t)\right)$$

genau dann gleich 0, wenn $\gamma(t)$ und $\gamma''(t)$ für alle $t \in [a,b]$ linear abhängig sind. Bei Zentralbewegungen, beispielsweise dem Mond um die Erde oder der Erde um die Sonne, ist dies der Fall. Damit ist die Flächengeschwindigkeit dann konstant. Diese Aussage ist als **Kepplerscher Flächensatz** bekannt.

1.6 Elemente der globalen Kurventheorie

1.7 Aufgaben

Aufgabe 1

Eine parametrisierte Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt genau dann **periodisch** mit Periode $T > 0$, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ und weiterhin ist die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft.
Eine Kurve heißt **geschloßen**, wenn Sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.
Sei γ die Parametrisierung nach Bogenlänge einer geschlossenen Kurve. Zeigen Sie, daß γ periodisch ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß eine Frenet-Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ genau dann konstante Krümmung und Torsion hat, wenn γ Teil einer **Schraubenlinie** ist, d.h., daßnach Anwendung einer geeigneten starren Bewegung gilt

$$\gamma(I) \subseteq \{(a\cos(t)\,,\, a\sin(t)\,,\, bt)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

2 Flächen im Raum

Um die sogenannten eingebetteten (regulären) Flächen, bspw. Sphären, Tori, etc. einzuführen, brauchen wir zuerst lokale Parametrisierungen die die einbettete Fläche lokal beschreiben.

Definition 2.1 (Parametrisiertes Flächenstück)**.**
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Eine C^k-Funktion

$$\begin{cases} f \; : & U & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u_1, u_2) & \mapsto & f(u_1, u_2) \end{cases}$$

*mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt genau dann **parametrisiertes Flächenstück**, wenn sie eine Immersion[a] ist, d.h. für alle $u \in U$ ist die Abbildung $Df(u)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv[b].*
*Man nennt f auch **Parametrisierung**. Die Elemente in U heißen **Parameter** und deren Bilder unter f heißen Punkte der Fläche.*
*Die Kurven $u_1 \mapsto f(u_1, u_2^0)$ und $u_2 \mapsto f(u_1^0, u_2)$ heißen **Parameterlinien** von f durch $f(u_1^0, u_2^0)$ für $(u_1^0, u_2^0) \in U$.*

[a]Statt Immersion wird f auch oft regulär genannt, wenn $Df(u)$ für alle $u \in U$ injektiv ist.
[b]Die (Jacobi-Matrix $Df(u)$ hat also vollen Rang für alle $u \in U$.

Bemerkung 2.1.
Im Falle der Definition 2.1 heißt $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ Immersion (regulär) nichts anderes als das die Vektoren $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ linear unabhängig sind. Siehe dazu auch Abbildung 2

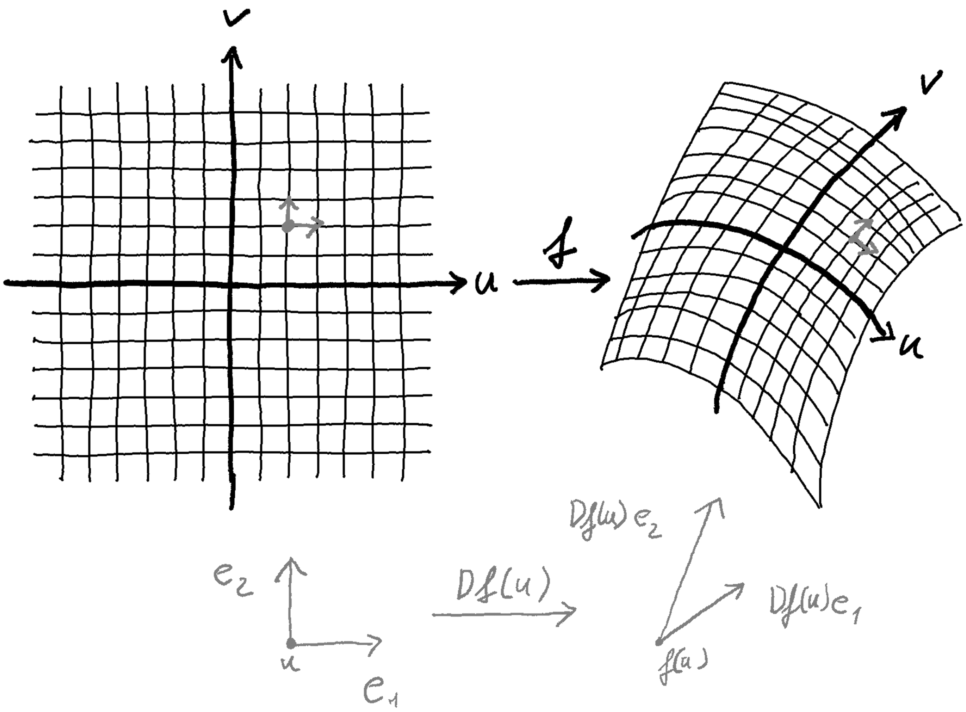

Abbildung 2.1: Definition eines parametrisierten Flächenstückes.

Definition 2.2 (Flächenstück)**.**
Ein (unparametrisiertes) C^k-Fächenstück, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten C^k-Flächenstücken wobei zwei parametrisierte Flächenstücke $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ und $\tilde{f}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ äquivalent sind, wenn ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi\colon \tilde{U} \to U$ existiert mit $\tilde{f} = f \circ \varphi$.

Beispiel 2.1.

(i) *Das einfachste Beispiel ist die Einbettung* $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

(ii) *Die Immersion*

$$\begin{cases} f \;:\; \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \;\to\; \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) \;\mapsto\; f(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} \cos(u_1)\cos(u_2) \\ \sin(u_2)\cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ist ein parametrisiertes Flächenstück. Das Bild $f(\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ *ist die Einheitssphäre ohne Nord- und Südpol.*

(iii) *Die Immersion*

$$\begin{cases} f \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) \;\mapsto\; f(u_1, u_2) = \frac{1}{1+u_1^2+u_2^2} \begin{bmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ u_1^2 + u_2^2 - 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ist ein parametrisiertes Flächenstück. Das Bild $f(\mathbb{R}^2)$ *ist die Einheitssphäre ohne Nordpol. Diese Abbildung heißt auch die stereographische Projektion.*

(iv) *Für* $0 < r < R$, *ist die Immersion*

$$\begin{cases} f \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) \;\mapsto\; f(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} (R + r\cos(u_1))\cos(u_2) \\ (R + r\cos(u_1))\sin(u_2) \\ R\sin(u_1) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ist ein parametrisiertes Flächenstück. Das Bild $f(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *ist ein Torus.*

(v) Sei $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ *eine reguläre Kurve mit* $\gamma_1(t) \neq 0$ *für alle* $t \in (a,b)$. *Durch Rotation von* γ *um die* x_2*-Achse entsteht die Abbildung*

$$\begin{cases} f \quad : \quad (a,b)\times\mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}^3 \\ \qquad\qquad (u_1,u_2) \quad \mapsto \quad f(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} \gamma_1(u_1)\cos(u_2) \\ \gamma_1(u_1)\sin(u_2) \\ \gamma_2(u_1) \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Durch die Voraussetzung $\gamma_1(t) \neq 0$ *für alle* $t \in (a,b)$ *ist* f *eine Immersion und* $f((a,b)\times\mathbb{R})$ *ein Flächenstück in* $\mathbb{R}^3$.
Als Beispiel erhält man die Kugel ohne Nord- und Südpol, wenn man den offenen Halbkreis um die y*-Achse rotiert. Den Rotationstorus erhält man mit der Wahl* $g(t) = [R + r\cos(t)], r\sin(t)]^T$, $(0 < r < R)$.

(vi) Wenn $h\colon U \to \mathbb{R}$ *(*$U \subseteq \mathbb{R}^2$ *offen) eine* C^1*-Funktion ist, dann ist*

$$\begin{cases} f \quad : \qquad U \quad \to \quad \mathbb{R}^3 \\ \qquad\qquad (u_1,u_2) \quad \mapsto \quad f(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h(u_1,u_2) \end{bmatrix} \end{cases}$$

eine Immersion und $f(U)$ *ein Flächenstück in* $\mathbb{R}^3$. *Dies ist gerade der Graph von* h.

Nun kommen wir zur Definition einer eingebetteten Fläche. Dabei handelt es sich um eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die lokal durch parametrisierte Flächenstücke beschrieben werden kann. Präziser:

Definition 2.3 (Eingebettete/reguläre Fläche)**.**
*Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt genau dann eine **eingebettete C^k-Fläche**, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (auch **reguläre Fläche**), wenn zu jedem $p \in S$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von p und ein parametrisiertes C^k-Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit*

$$f(U) = S \cap V$$

existiert, so daß $f\colon U \to V \cap S$ ein Homöomorphismus ist.[a]
*Mann nennt $S \cap V$ auch **Koordinatenumgebung** von p und f eine **lokale Parametrisierung** der Fläche um p. Wir werden die lokale Parametrisierung auch mit dem Tripel (U, f, V) bezeichnen. Die Komponenten von u heißen lokale Koordinaten des Punktes $f(u)$ (bzgl. der Parametrisierung f).*

[a]Die Immersion f ist also injektiv und $f^{-1}\colon S \cap V \to U$ stetig.

Bemerkung 2.2.
Die lokalen Koordinaten hängen natürlich von der Parametrisierung ab. Wenn eine Definition auf lokale Koordinaten bezug nimmt, dann muß gezeigt werden, daß diese unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung ist.

Bemerkung 2.3.
Wenn man in Definition 2.3 $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^3$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt erhält man die Definition einer d-dimensionalen C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

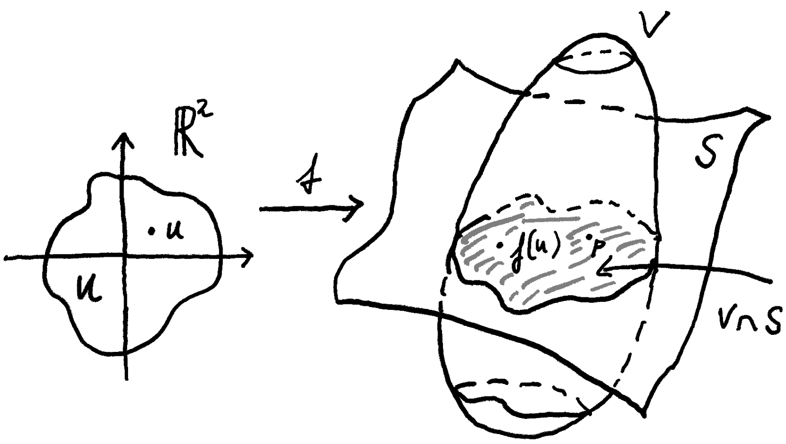

Abbildung 2.2: Eingebettete Fläche S.

Übungsaufgabe 2.1 ([1], Aufgabe 3.2).
Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete Fläche und $W \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Zeigen Sie, daß dann auch $W \cap S$ eine reguläre Fläche ist.

Übungsaufgabe 2.2 ([1], Aufgabe 3.3).
Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Wenn es für jedes $p \in S$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von p gibt, so daß $V \cap S$ eine eingebettete Fläche ist, dann ist auch S eine eingebettete Fläche. Mit anderen Worten: die Eigenschaft eine eingebettete Fläche zu sein ist eine lokale Eigenschaft.

Beispiel 2.2. *(i) Graphen wie in (vi) von Beispiel 2.1 sind eingebettete Flächen: Wenn $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen eine differenzierbare Funktion ist, dann ist $F\colon U \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2) = [x_1, x_2, h(x_1, x_2)]^T$ eine injektive Immersion. Die (stetige) Umkehrfunktion der Funktion F ist einfach die Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ eingeschränkt auf $f(U)$.*

(ii) Die Sphäre ist eine eingebettete Fläche ebenso wie der Torus und weitere aus Tori zusammengesetzte Flächen. Die lokalen Parametrisierung für die Sphäre kann man erhalten indem man die offenen Halbkugeln auf die Seiten eines die Kugel umfassenden Würfels projiziert. Man kann für den Torus im wesentlichen das gleiche tun, die Details sind der Leserin zur Übung überlassen.

(iii) Das Bild der Funktion

$$\begin{cases} f \ : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} au_1 \cos(u_2) \\ au_1 \sin(u_2) \\ bu_2 \end{bmatrix} \end{cases},$$

ist die sogenannte Helikoide (Wendelfäche) und ist eine eingebettete Fläche.

Wie erkennen wir eingebettete Flächen? Ein Weg ist es natürlich die geforderten lokalen Parametrisierungen zu finden. Dies ist aber of sehr aufwendig. Glücklicher Weise gibt es ein einfaches Kriterium, daß uns eine ganze Menge an eingebetteten Flächen liefert. Dazu eine Definition, die des regulären Punktes, sowie die Wiederholung eines wichtigen Satzes aus der Analysis, dem Satz von der impliziten Funktion/Umkehrfunktion.

Definition 2.4 (Regulärer Wert)**.**
Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen $p \in U$ einen

kritischen Punkt, *wenn* $Df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *nicht surjektiv ist.*

Das Bild $f(p) \in \mathbb{R}^m$ *heißt* ***kritischer Wert*** *von* f.

Ein Punkt $q \in \mathbb{R}^3$, *der nicht kritischer Wert von* f *ist, heißt* ***regulärer Wert*** *von* f.

Satz 2.1 (Satz von der inversen Funktion)**.**
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *offen und* $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ *von der Klasse* C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $p \in U$ *und* $f(p) = q$. *Es gelte* $\det(Df(p)) \neq 0$.
Dann existieren Umgebungen $V(p) \subseteq U$ *und* $W(q) \subseteq \mathbb{R}^3$ *so, daß* $f\colon V \to W$ *ein* C^k *Diffeomorphismus ist.*

Satz 2.2 (Satz vom regulären Wert)**.**
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *und es sei* $q \in F(U)$ *ein regulärer Wert von* f. *Dann ist* $f^{-1}(q)$ *eine eingebettete(/reguläre) Fläche in* $\mathbb{R}^3$.

Korollar 2.1.
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *die Niveaumenge* $S = \{x \in U\colon\ f(x) = 0\} \neq \emptyset$ *für eine* C^k*-Funktion* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *mit* $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *offen,* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Wenn $\nabla f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in S$, *dann ist* S *eine eingebettete Fläche.*

Beispiel 2.3.
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $f(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. *Die Funktion ist glatt und* 0 *ist ein regulärere Wert von* f *da nur* (x_1, x_2, x_3) *ein kritischer Punkt und* 1 *ein kritischer Wert ist. Damit ist*

$$f^{-1}(0) = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

eine eingebettete/reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Sei

$$p = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in f^{-1}(q).$$

Da q regulärer Wert von f ist, muß $Df(p)$ surjektiv sein, d.h. mindestens eins $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ muß ungleich 0 sein für $1 \leq i \leq 3$. Durch Umbenennung der Variablen können wir annehmen, daß $\frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \neq 0$. Wir können nun die Abbildung

$$\begin{cases} F \;: \quad U \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \end{cases}$$

definieren, wir bezeichnen die Koordinaten eines Wertes von F mit (y_1, y_2, y_3). Das Differential $Df(p)$ ist dann gegeben durch

$$Df(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \end{bmatrix}$$

und da $\frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \neq 0$ ist, gilt $\det(DF(p)) \neq 0$. Nach Satz 2.1 existieren Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von p und $W \subseteq \mathbb{R}^3$ von $F(p)$ so, daß $F\colon V \to W$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Damit sind die Koordinatenfunktionen von F^{-1}, d.h.

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = g(y_1, y_2, y_3), \quad (y_1, y_2, y_3) \in W$$

auch C^k-Funktionen. Insbesondere ist $x_3 = g(y_1, y_2, q) = h(x_1, x_2)$ definiert und C^k auf der Projektion von V in die x_1x_2-Ebene.
Da

$$F(f^{-1}(q) \cap V) = W \cap \{(y_1, y_2, y_3)\colon \; y_3 = q\}, \tag{2.0.1}$$

gilt $\mathrm{graph}(h) = f^{-1}(q) \cap V$. Nach (i) in Beispiel 2.2 ist $f^{-1}(q) \cap V$ ein parametrisiertes Flächenstück. Damit kann jedes $p \in f^{-1}(q)$ durch ein parametrisiertes Flächenstück abgedeckt werden. □

Beispiel 2.4.
Die Menge

$$T = \left\{(x_1, x_2, x_3) \colon \ (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\right\}$$

mit $0 < r < R$ *heißt Rotationstorus und ist eine eingebettete Fläche. Den Nachweis überlassen wir der Leserin.*

2.1 Parametertransformation

In der Differentialgeometrie untersuchen Eigenschaften von Flächen, die vom lokalen Verhalten der Fläche in der Umgebung eines Punktes abhängen. Dies ist im wesentlichen in der Definition 2.3 der eingebetteten Fläche widergespiegelt da nach dieser Definition jeder Punkt p zu einer lokale Koordinatenumgebung gehört.
Es wird später wichtig sein zu wissen, was es heißt, daß eine Funktion $F\colon S \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Eine naheliegende Definition ist eine Koordinatenumgebung von p zu wählen und und zu definieren, daß F in lokalen Koordinaten Differenzierbar ist (siehe Definition **??**). Es kann aber sein, daß der gleiche Punkt $p \in S$ zu mehreren Koordinatenumgebungen gehört. Es ist also notwendig zu sehen, daß die gegebene Definition nicht von der Wahl der lokalen Koordinaten abhängt, d.h. es muß möglich sein C^k-regulär von einer Parametrisierung in die andere zu wechseln. Der kommende Satz stellt dies klar.

Satz 2.3 (Parametertransformation)**.**
Sei S eine eingebettete C^k-Fläche und $p \in S$. Weiter seien $f\colon U \to S$, $g\colon V \to S$ zwei lokale Parametrisierungen von S mit $f(U) \cap f(V) = W \subseteq \mathbb{R}$.
Dann ist die Parametertransformation (Koordinatenwechsel/Kartenwechsel)

$$\varphi\colon f^{-1} \circ g\colon g^{-1}(W) \to f^{-1}(W)$$

ein C^k-Diffeomorphismus.

2.2 Abbildungen zwischen Flächen

Definition 2.5.
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete C^k-Fläche und es sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert auf $V \subseteq S$ relativ offen.
Es heißt f genau dann differenzierbar in $p \in V$, wenn für eine Parametrisierung $\varphi\colon U \to S$ mit $p \in \varphi(U) \subseteq V$, die Funktion $f \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}$ in $\varphi^{-1}(p)$ differenzierbar ist.

Bemerkung 2.4.
die gegebene Definition hängt nicht von der Wahl der lokalen Parametrisierung ab. Wenn $\psi\colon V \to S$, $p \in \psi(V)$ eine weitere Parametrisierung ist und $h = \varphi \circ \psi^{-1}$, dann ist $f \circ \varphi = f \circ \varphi \circ h$ ebenfalls differenzierbar.

Definition 2.6 (Differenzierbare Abbildungen zwischen)**.**
Es seine S_1 und S_2 eingebettete C^k Flächen. Sei $V_1 \subseteq S_1$ offen und $f\colon V_1 \to S_2$ stetig. Die Funktion f heißt genau dann differenzierbar in $p \in V_1$ wenn, für die Parametrisierungen

$$\varphi_1 : U_1 \to S_1 \qquad \varphi_2 : U_2 \to S_2$$

mit $p \in \varphi_1(U_1)$ und $f(\varphi(U_1)) \subseteq \varphi_2(U_2)$, die Abbildung

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$$

in $q = \varphi_1^{-1}(p)$ differenzierbar ist.

2.3 Der Tangentialraum

Wir definieren mit $T\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ das sogenannte **Tangentialbündel** des $\mathbb{R}^n$. Für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ ist

$$T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

der **Tangentialraum** von $\mathbb{R}^n$ im Punkt p. Wir wollen mit dieser Definition zwischen den Punkten des $\mathbb{R}^n$ und Vektoren unterscheiden.
Mit $T\mathbb{R}^n$ haben wir ein sogenanntes Vektorbündel, genauer ein **triviales Vektorbündel**, d.h. ein Vektorbündel das global (hier per Definition) ein Produkt ist.

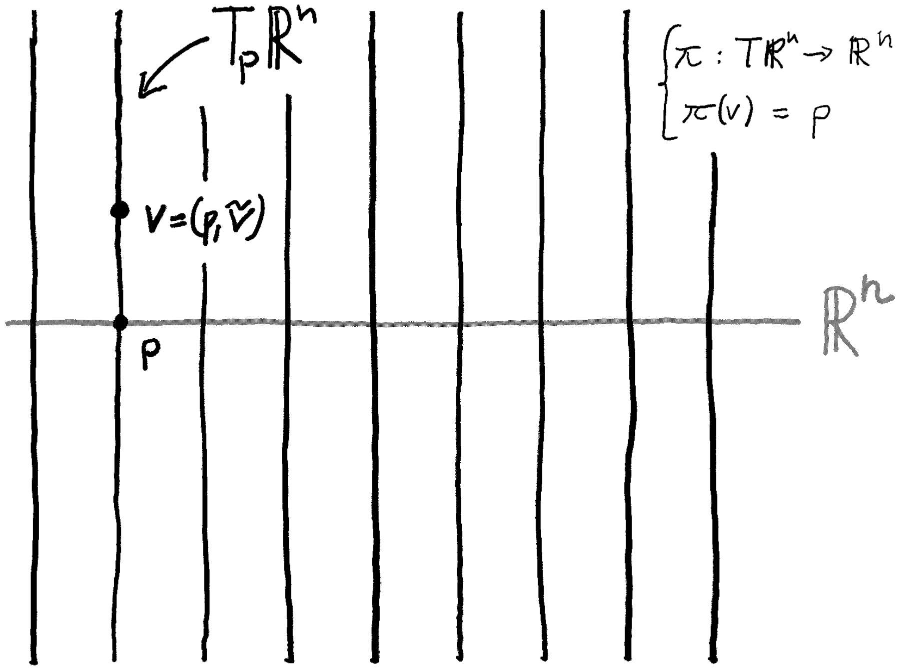

Abbildung 2.3: Schematische Darstellung des trivialen Vektorbündels $T\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\pi\colon TM \to \mathbb{R}^n$ wird die kanonische Projektion genannt und weist jedem Punkt in $T\mathbb{R}^n$ seinen Fußpunkt zu.

Wir reinterpretieren nun das Differential $Df(p)$, ($f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in U$) als lineare Abbildung nicht nur von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^n$ sondern nehmen den

Fußpunkt mit in unsere Notation auf:

$$\begin{cases} Df(p) & : & T_p\mathbb{R}^d & \to & T_{f(p)}\mathbb{R}^n \\ & & (p,v) & \mapsto & (f(p), Df(p)v) \end{cases}$$

mit diesen Vorbereitungen geben wir

Definition 2.7 (Tangentialraum/Tangentialbündel)**.**
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Dann ist $TU = U \times \mathbb{R}^2$ das Tangentialbündel von U und wir bezeichnen für $u \in U$ mit $T_uU = \{u\} \times \mathbb{R}^2$ den Tangentialraum von U in u.
Sei nun $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein eingebettetes Flächenstück, $p \in S$ und $f\colon U \to S$ eine lokale Parametrisierung mit $f(u) = p$. Dann setzen wir für den ***Tangentialraum*** *T_pS an S in p*

$$T_pS := Df(u)(T_uU) = \mathrm{im}(Df(u)) \subseteq T_p\mathbb{R}^3$$

für $p \in S$ mit $f(u) = p$. Das ***Tangentialbündel*** *von S, TS ist definiert durch*

$$TS = \bigcup_{p\in S} T_pS.$$

Da das Differential einer Immersion stets vollen Rang hat, erhalten wir ohne Umschweife die Dimension des Tangentialraumes.

Korollar 2.2.
Für ein eingebettetes Flächenstück $S \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt $\dim(T_pS) = 2$ für alle $p \in S$.

Hilfssatz 2.1.
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein eingebettetes Flächenstück. Dann ist die Definition von T_pS für $p \in S$ unabhängig von der in Definition 2.7 benutzen Parametrisierung ab.
Genauer: Es sei $p \in S$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{f}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ lokale Parametrisierungen von S um p mit $f(p) = u$. Weiterhin sei $\varphi\colon \tilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus mit $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann gilt $\operatorname{im}(Df(u)) = \operatorname{im}(D\tilde{f}(u))$.

Beweis. Nach dem Satz über die inverse Funktion sind Immersionen lokale Diffemorphismen. Durch Verkleinerung der Umgebungen U und $\tilde{U}$ können wir also erreichen, daß $f, \tilde{f}$ injektiv sind. Das Differential der □

Um eine alternative Definition von T_pS zu geben, klären wir als erstes, was wir unter einer Kurve in einer eingebetteten Fläche S verstehen wollen.

Definition 2.8 (Kurve auf Fläche).
Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Dann heißt $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf S, wenn eine ebene Kurve $\tilde{\gamma}\colon \tilde{I} \to U$ mit $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ existiert.

Nun gegeben wir eine alternative Definition von T_pS, basierend auf Kurven und deren Tangentialvektoren.

Definition 2.9 (Alternative Definition T_pS).
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete C^k Fläche, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann definieren wir für $p \in S$ den Tangentialraum T_pS durch

$$\widetilde{T_pS} := \Big\{(p, v) \in S \times \mathbb{R}^3 \colon \exists \varepsilon > 0\ \exists C^k - \textit{Kurve}\ \gamma\colon \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \\ \textit{mit}\ \gamma(0) = p\ \textit{und}\ \gamma'(0) = v.\Big\}$$

Der folgende Satz wird klären, daß $T_pS = \widetilde{T_pS}$ gilt und wir werden nach seinem die beiden nicht mehr unterscheiden sondern einfach die Sichtweise einnehmen, die uns im Moment am nützlichsten erscheint.

Satz 2.4.
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete Fläche. Die Definition des Tangentialraumes in Definition 2.7 und die in Definition 2.9 sind äquivalent.
Genauer: Für $p \in S$ und eine lokale Parametrisierung $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $f(u) = p$ gilt

$$\widetilde{T_pS} = \{p\} \times \operatorname{im}(D(u)f) = Df(u)(T_uU) = T_pS.$$

Beweis. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung von S um p.

1. Als erstes zeigen wir $\operatorname{im}(Df(u)) = T_pS \subseteq \widetilde{T_pS}$. Es sei $v = (p, \tilde{v}) \in \operatorname{im}(Df(u))$. Dann existiert per Definition ein $w \in T_uU$ mit $w = (u, \tilde{w})$ und $v = Df(u)w = (p, Df(u)\tilde{w})$.
   Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $u + t\tilde{w} \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon.)$. Damit definieren wir γ durch
   $$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, \quad t \mapsto \gamma(t) := f(u + t\tilde{w}).$$
   Nach Konstruktion gilt $\gamma(0) = f(u) = p$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\gamma'(0) = \tilde{v}$:
   $$\gamma'(0) = \frac{d}{dt} f(u + t\tilde{w})\Big|_{t=0} = Df(u)\tilde{w} = \tilde{v}.$$
   Wobei wir nach dem ersten Gleichheitszeichen die Richtungsableitung von f in Richtung $\tilde{w}$ erkennen. Da f mindestens differenzierbar ist, ergibt sich das zweite Gleichheitszeichen. Damit ist $v = (p, \tilde{v}) \in \widetilde{T_pS}$.

2. Nun zeigen wir $\widetilde{T_pS} \subseteq T_pS$. Sei also $v \in \widetilde{T_pS}$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = \tilde{v}$. Nach evtl. Verkleinerung von ε gilt $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq S \cap V$. Die parametrisierte Kurve
   $$\alpha = f^{-1} \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$$

ist eine C^k-Funktion. Wir setzen $\tilde{w} = \alpha'(0)$. Dann gilt

$$Df(u)\tilde{w} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ f^{-1} \circ \gamma)\Big|_{t=0} = \gamma'(0) = \tilde{v}.$$

Damit ist $v = (p, \tilde{v}) \in T_pS = \{p\} \times \mathrm{im}(Df(u))$.

$\square$

Wenn die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ als Nullstellenmenge einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben ist, wie beispielsweise die Sphäre, dann können wir den Tangentialraum mit Hilfe des Gradienten ∇f angeben.

Satz 2.5.
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion, $k \in \mathbb{N}$. Sei weiter $f^{-1}(0) = S$ und $\nabla f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Damit steht für $p \in S$ der Gradient von f senkrecht auf der Tangentialebene

$$T_pS = \{p\} \times (\nabla f(p))^{\perp}.$$

Beweis. Es sei $v \in T_pS$, $v = (p, \tilde{v})$ und $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine Kurve in S mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = \tilde{v}$. Da die Kurve γ in S verläuft, gilt $(f \circ \gamma)(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Die Ableitung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} &= \langle \nabla f(\gamma(0))\,,\, \gamma'(0)\rangle \\ &= \langle \nabla f(p)\,,\, \tilde{v}\rangle\,.\end{aligned}$$

Damit gilt $\tilde{v} \perp \nabla f(p)$. Damit gilt $T_pS \subseteq \{p\} \times (\nabla f(p))^{\perp}$. Da T_pS und $(\nabla f(p))^{\perp}$ beide Unterräume von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 sind, gilt $T_pS = \{p\} \times (\nabla f(p))^{\perp}$. $\square$

2.3.1 Das Differential

Wir wollen noch klären, was das Differential einer Abbildung $f\colon S_1 \to S_2$ zwischen zwei eingebettete C^k-Flächen ist.

2.4 Die 1. Fundamentalform

Wenn wir Kurven auf eingebetteten Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ weiter studieren wollen, beispielsweise deren Länge definieren, dann brauchen wir weitere Hilfsmittel.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $p \in M$. Für $v, w \in T_pM$ mit $v = (p, \tilde{v})$ und $w = (p, \tilde{w})$ bezeichnen wir mit $\langle v\,,\, w\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt $\langle \tilde{v}\,,\, \tilde{w}\rangle_{\mathbb{R}^3}$ von $\mathbb{R}^3$. Wir haben also auf dem zweidimensionalen Unterraum $T_pS \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt durch Einschränkung definiert.

Definition 2.10 (Erste Fundamentalform)**.**
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete Fläche. Die Funktion g (oder auch I), die jedem Punkt $p \in S$ die bilineare Abbildung

$$g_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \quad g_p(X, Y) = \langle X\,,\, Y\rangle,$$

*zuordnet, heißt die erste **Fundamentalform** von S.*

Wir wollen nun die erste Fundamentalform I in lokalen Koordinaten beschreiben. Sei also S unsere eingebettete Fläche, $p \in S$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück um p mit $u \in U$ und $f(u) = p$. Dann ist g_p gegeben durch

$$T_uU \times T_uU \ni (v, w) \mapsto g_p(v, w) = \big\langle \underbrace{Df(p)u}_{\in T_pS}\,,\, \underbrace{Df(p)w}_{\in T_pS} \big\rangle.$$

Aus der lineare Algebra wissen wir, daß wir eine Bilinearform durch Matrizen beschreiben können. Dazu müßen wir eine Basis wählen. Sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$Df(u)e_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \quad \text{und} \quad Df(u)e_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$$

und wir erhalten die Matrixdarstellung $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ von g durch

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &:= \langle Df(u)e_i \,,\, Df(u)e_j \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) \,,\, \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \right\rangle . \end{aligned}$$

Klassischerweise, werden (wie oben bzgl. der Standardbasis) die folgenden Bezeichnungen benutzt

$$\begin{aligned} E &= g_{1,1} = g_p(e_1, e_1) = \langle \partial_{u_1} f(u) \ \partial_{u_1} f(u) \rangle, \\ F &= g_{1,2} = g_p(e_1, e_2) = \langle \partial_{u_1} f(u) \ \partial_{u_2} f(u) \rangle, \\ G &= g_{2,2} = g_p(e_2, e_2) = \langle \partial_{u_1} f(u) \ \partial_{u_2} f(u) \rangle. \end{aligned}$$

Wir untersuchen noch was passiert, wenn wir zwei verschiedene Parametrisierungen um den Punkt $p \in S$ haben. Seien also $f \colon U \to \mathbb{R}^3$ und $\tilde{f} \colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ zwei lokale Parametrisierungen von S um p. Die zu f gehörige Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform sei weiterhin mit $(g_{ij})_{ij}$ und die von $\tilde{f}$ mit $(\tilde{g}_{ij})_{ij}$ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $\varphi := \tilde{f}^{-1} \circ f$ die Parametertransformation und erhalten mit Kettenregel:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= g_p \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}(u) \,,\, \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \right) \\ &= g_p \left(\frac{\partial (\tilde{f} \circ \varphi)}{\partial u_i}(u) \,,\, \frac{\partial (\tilde{f} \circ \varphi)}{\partial u_j}(u) \right) \\ &= g_p \left(\sum_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}_k}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u) \,,\, \sum_l \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}_l}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j}(u) \right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j}(u) \cdot g_p \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}_k}(\varphi(u)) \,,\, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}_l}(\varphi(u)) \right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j}(u) \, \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)). \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise erhalten wir damit

$$(g_{ij})_{ij} = (D\varphi(u))^T \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u)))_{kl} \cdot D\varphi(u).$$

Wir können die obige Rechnung erheblich verkürzen, wenn man zeigt, daß

$$(g_{ij})_{ij} = (Df)^T \circ Df.$$

Dies ist leicht einzusehen, da

$$\begin{aligned}
(Df)^T \circ Df &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial u_1})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial u_1})^2 & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial f_2}{\partial u_2} & (\frac{\partial f_1}{\partial u_2})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial u_2})^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (Dfe_1)^T Dfe_1 & (Dfe_1)^T Dfe_2 \\ (Dfe_2)^T Dfe_1 & (Dfe_2)^T Dfe_2 \end{bmatrix} = (g_{ij})_{ij}.
\end{aligned}$$

Damit rechnen wir

$$\begin{aligned}
(\tilde{g}_{ij})_{ij} &= (D\tilde{f})^T D\tilde{f} \\
&= (Df \circ F\varphi)^T (Df \circ D\varphi) \\
&= (D\varphi)^T (Df)^T (Df)(D\varphi) \\
&= (D\varphi)^T (g_{ij})_{ij} (D\varphi).
\end{aligned}$$

Definition 2.11.
Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Wir sagen

(i) f ist ***orthogonal*** *parametrisiert, falls $\langle \partial_{u_1} f\,, \partial_{u_2} f\rangle = 0$ also $F \equiv 0$ gilt.*

(ii) f ist ***konform*** *parametrisiert, f orthogonal parametrisiert ist und $\langle \partial_{u_1} f\,, \partial_{u_1} f\rangle = \langle \partial_{u_2} f\,, \partial_{u_2} f\rangle$, also $E = G$ gilt.*

(iii) f ist ***isometrisch*** *parametrisiert, wenn f konform parametrisiert ist mit $\langle \partial_{u_1} f\,, \partial_{u_1} f\rangle = \langle \partial_{u_2} f\,, \partial_{u_2} f\rangle = 1$. (Dann ist g das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.)*

Bemerkung 2.5.
Wenn $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein konform parametrisiertes Flächenstück ist, dann sind die Schnittwinkel von Kurven auf f gleich denen ihrer Urbilder. Ist f isometrisch parametrisiert, so gilt dies auch für Längen.

Beispiel 2.5.
Der Zylinder $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \left[\cos(x), \sin(x), y\right]^T$ ist isometrisch parametrisiert. Die Helikoide in Beispiel 2.2 (iii) ist orthogonal parametrisiert. (Nachrechnen!)

Beispiel 2.6 (Rotationsflächen)**.**
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $\gamma_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann heißt das parametrisierte Flächenstück

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = \left[\gamma_1(x)\cos(y)\,,\, \gamma_1(x)\sin(y)\,,\, \gamma_2(x)\right]^T$$

Rotationsfläche *zur* ***Meriadiankurve*** *γ. Rotationsflächen sind orthogonal parametrisiert und man kann durch Umparametrisierung der Meridiankurve* *sogar konforme Parametrisierung erreichen.*

2.5 Normalenfelder und Orientierbarkeit

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $N\colon U \to \mathbb{S}^2$ in die Einheitssphäre, so daß

$$u \in U\colon \quad \partial_{u_1} f \perp (f(u), N(u)) \quad \text{und} \quad \partial_{u_2} f \perp (f(u), N(u))$$

und $(\partial_{u_1} f(p), \partial_{u_2} f(p))$, $(f(p), N(p))$ eine positiv orientierte Basis von $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ sind.

Definition 2.12 (Gaußabbildung)**.**
Für ein parametrisiertes Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}$ ist die Gauß-Abbildung

$$N\colon U \to \mathbb{S}^2$$

definiert als

$$N(u_1, u_2) = \frac{\partial_{u_1} f \times \partial_{u_2} f}{\|\partial_{u_1} f \times \partial_{u_2} f\|_2}$$

Definition 2.13 (Normalenfeld)**.**
*Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete Fläche. Ein **Normalenfeld** auf S ist eine Abbildung*

$$N\colon S \to \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto N(p) \in (T_p S)^{\perp}.$$

*Ein normalenfeld heißt **Einheitsnormalenfeld**, wenn $\|N(p)\|_2 = 1$ für alle $p \in S$.*

Definition 2.14 (Orientierbarkeit)**.**
*Eine eingebettete C^k-Fläche heißt orientierbar, wenn es ein C^{k-1}-Einheitsnormalenfeld besitzt. Die Fläche S zusammen mit diesem Einheitsnormalenfeld heißt eine **orientierte Fläche** und N eine **Orientierung** für S.*

Wie wir am Anfang der Sektion gesehen haben sind eingebettete Flächen lokal immer orientierbar. Sei $p \in S$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = p$ eine lokale Parametrisierung um p. Da f eine Immersion ist, sind die Vektoren $Df(u)e_1 = \partial_{u_1} f(u)$ und $Df(u)e_2 = \partial_{u_2} f(u)$ linear unabhängig und wir können

$$S \cap V \ni p \mapsto \tilde{N}(p) = \partial_{u_1} f(u) \times \partial_{u_2} f(u) \neq (0,0,0)^T$$

definieren und

$$S \cap V \ni p \mapsto N(p) = \frac{\tilde{N}(p)}{\|\tilde{N}(p)\|_2}$$

setzen. Wir hätten natürlich auch $-N\colon S \cap V \to \mathbb{S}^2$ nehmen können. Führen wir die Konstruktion des Einheitsnormalenfeld für zwei lokale Parametrisierungen $f_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^3$, $f_2\colon U_2 \to \mathbb{R}^3$ durch, so können die zugehörigen Einheitsnormalenvekoren in Punkten aus $S \cap V_1 \cap V_2$ entweder übereinstimmen oder aber negativ zueinander orientiert sein. Wir wollen dies noch durch eine Bedingung an die Parametertransformation $\varphi\colon f_2^{-1} \circ f_1$ aus.

Satz 2.6.
Eine eingebettete Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn S derart durch lokale Parametrisierungen überdeckt werden kann, daß für alle Parametertransformationen φ gilt

$$\det(D\varphi) > 0.$$

Bemerkung 2.6.
Falls S als Nullstellenmenge einer C^k-Funktion definiert ist ($\nabla f \neq 0$ auf S), dann ist das Einheitsnormalenfeld gegeben durch

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}.$$

Um Krümmung zu untersuchen kann man zwei Konzepte verfolgen. Zum einen, wie im Abschnitt zu Kurven kann man das Änderungsverhalten der Tangentialräume untersuchen und zum Andren die Krümmung von Kurven die in der Fläche verlaufen. Dies werden wir im folgenden tun. Der erste Ansatz führ zur Definition der Weingartenabbildung und der zweite zur zweiten Fundamentalform; das sehen wir erst nach der Definition der zweiten Fundamentalform). Beide Beschreibungen der Krümmung sind äquivalent.

2.6 Die Weingartenabbildung

Die Tangentialebene T_pS an eine Fläche S im Punkt $p \in S$ kann durch den Normaleneinheitsvektor beschrieben werden, da $T_pS = \{p\} \times (N(p))^\perp$.

Wir wollen im folgenden betrachten wie sich die Tangentialebene ändert, wenn wir in Richtung eines Tangentialvektors gehen. Sei also $v \in T_pS$ und wir wollen die Änderungsrate von N in Richtung v, also das Differential $DN(p)v$, die Richtungsableitung von N ij Richtung v.

Da $N \colon S \to \mathbb{S}^2$ gilt, folgt $Df(p) \colon T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ (also ist $DN(p)v$ tangential zu $\mathbb{S}^2$ im Punkt $N(p)$) und es gilt $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{p\} \times N(p)^\perp = T_pS$. Damit gilt $DN(p) \colon T_pS \to T_pS$.

Definition 2.15 (Weingartenabbildung).
Sei S eine orientierbare reguläre C^k Fläche ($k \geq 2$) mit Einheitsnormalenfeld N.
Die ***Weingartenabbildung*** *zu $p \in S$ ist die lineare Abbildung $W_p = -DN(p) \colon T_pS \to T_pS$.*

Hilfssatz 2.2 (Weingartenabbildung (Alt. Definition)).
Sei S eine orientierte reguläre C^k Fläche ($k \geq 2$) mit Einheitsnormalenfeld N. Sei nun $p \in S$, $v \in T_pS$ und $\gamma \colon I \to S$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist $W_p(v) = -\frac{d}{dt}N(\gamma(t))\Big|_{t=0}$.

Bemerkung 2.7.
Die Definition hängt nicht von der Wahl von γ ab.

Als nächsten wollen wir uns überlegen, wie die Weingartenabbildung in lokalen Koordinaten zu berechnen ist. Sei $f\colon U \to S$ eine lokale Parametrisierung um $p \in S$, $f(u) = p$ und setze $X_1 = Df(u)e_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}$ und $X_2 = Df(u)e_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}$. Damit ist in der Basis $\{X_1, X_2\}$ die Matrixdarstellung gegeben als $[W_p(X_1)|W_p(X_2)]$. Nun benutzen wir Satz 2.2 zur Berechnung (wobei wir $N \circ f$ wieder als N schreiben und N damit als Funktion von u auffassen): Wir wählen nun $\gamma(t) = f(u + te_i)$ und erhalten

$$W_p(X_i) = -\frac{\partial N}{\partial u_i}$$

da $\frac{\partial}{\partial t}N(f(u + te_i)) = \frac{\partial N}{\partial u_i}$ gilt. Wir bezeichnen die korrespondierende Matrix mit $(w_i^j)_{ij}$, d.h.

$$W_p(X_i) = \sum_{j=1}^{2} w_i^j X_j.$$

Diese Matrix ist nicht symmetrisch.

Satz 2.7.
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte eingebettete Fläche mit Weingartenabbildung $W_p\colon T_pS \to T_pS$, $p \in S$. Dann ist W_p selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß für $X, Y \in T_pS$ gilt

$$g_p(X\,,\,W_p(Y)) = g_p(W_p(X)\,,\,Y).$$

Da g_p bilinear ist und W_p linear, können wir uns darauf beschränken, die Aussage

$$g_p(X_i\,,\,W_p(X_j)) = g_p(W_p(X_i)\,,\,X_j), \qquad i, j = 1, 2 \tag{2.6.1}$$

für die Basis von T_pS

$$X_1 = Df(u)e_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \quad \text{und} \quad X_2 = Df(u)e_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$$

für eine lokale Parametrisierung von S um p mit $f(u) = p$. Wir werden uns zunutze machen, daß $N(p) \in T_pS^\perp$ für alle $p \in S$, d.h

$$\forall u \in U: \qquad \langle X_i \,,\, N(f(u)) \rangle = 0.$$

Wir benutzen nun Lemma 2.2 und betrachten

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u + te_j) \,,\, N(f(u + te_j)) \right\rangle \equiv 0.$$

Nun Differenzieren wir diesen Ausdruck nach t und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u + te_j) \,,\, N(f(u + te_j)) \right\rangle \Bigg|_{t=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u + te_j) \Bigg|_{t=0} \,,\, N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) \,,\, DN(u)Df(u)e_j \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(u) \,,\, N(p) \right\rangle + \langle X_i \,,\, -W_p(X_j) \rangle \,.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
g_p(X_i \,,\, W_p(X_j)) &= \langle X_i \,,\, W_p(X_j) \rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(u) \,,\, N(p) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_i}(u) \,,\, N(p) \right\rangle \\
&= g_p(X_j \,,\, W_p(X_i)) \qquad (2.6.2)
\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Schwarz benutzt haben. Damit haben wir (2.6.1) gezeigt und der Satz ist bewiesen. □

2.7 Die zweite Fundamentalform

Aus der lineare Algebra wissen wir, daß selbstadjungierte Endomorphismen W endlichdimensionaler Vektorräume V mit Euklidischem Skalarprodukt $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ in $1 - -1$ Beziehung zu den symmetrischen Bilinearformen β auf V. Dabei stehen W und β in der Beziehung

$$\beta(X \, , \, Y) = \langle W(X) \, , \, Y \rangle.$$

Wir benutzen diese Beziehung um die sogenannte zweite Fundamentalform zu definieren. Die zweite Fundamentalform ist punktweise die Bilinearform die zu W_p gehört.

Definition 2.16 (Zweite Fundamentalform).
*Sei S eine orientierte eingebettete C^k-Fläche mit Weingartenabbildung W_p im Punkt $p \in S$. Die **zweite Fundamentalform** ist diejenige Abbildung, die jedem Punkt $p \in S$ die Bilinearform zuordnet, die zu W_p gehört, $p \mapsto II_p$.*
Es gilt

$$II_p \colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \quad II_p(X \, , \, Y) = g_p(W_p(X) \, , \, X). \tag{2.7.1}$$

Wie bei der ersten Fundamentalform und der Weingartenabbildung wollen wir uns natürlich überlegen, wie man die 2. Fundamentalform für eine gegeben lokale Parametrisierung berechnet. Sei also S eine Fläche, $p \in S$ und $f \colon U \to S$ eine lokale Parametrisierung um p, d.h. $f(u) = p$. Wir wählen wie immer $\{e_1, e_2\}$ in $\mathbb{R}^2$ und die korrespondierende Basis $X_1 = Df(u)e_1$, $X_2 = Df(u)e_2$ im Tangentialraum T_pS. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{ij} &:= II_p(X_i \, , \, X_j) \\ &= g_p(W_p(X_i) \, , \, X_j) \\ &= g_p\Big(\sum_k w_i^k X_k \, , \, X_j \Big) \\ &= \sum_k W_i^k g_p(X_k \, , \, X_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_k W_i^k g_{kj}.$$

Damit ist

$$(h_{ij})_{ij} = (w_i^j)_{ij} \cdot (g_{ij})_{ij}, \qquad \text{resp. } h = Wg. \tag{2.7.2}$$

Es gilt, da g invertierbar ist, auch $W = hg^{-1}$.

2.8 Krümmung

Nun beschreiben wir die Krümmung von Flächen mit Hilfe der Krümmung von Kurven in $S \subseteq \mathbb{R}^3$, eingebettete Fläche. Sei also $p \in S$, $v \in T_pS$ mit $\|v\|_g = g_p(v\,,\,v) = 1$. Wir setzen nun die mathematische Vorstellung um, daßS in p *in Richtung* v eine gewisse Krümmung besitzt.

Es liegt nahe, dazu Kurven $\gamma\colon I \to S$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(t) = v$zu verwenden und γ'' zu betrachten. Dies allein reicht allerdings nicht aus. Betrachten wir beispielsweise eine S die xy-Ebene, dann liegt γ'' in der Ebene, drückt aber die Krümmung der Fläche nicht aus. Die Ebene hat Krümmung 0. Der Vektor γ'' läßt sich in tangential und Normalkomponenten zerlegen und die Normalkomponente ist, was wir hier betrachten sollten.

Definition 2.17 (Normalkrümmung)**.**
Sei S eine eingebettete C^k-Fläche, $p \in S$, $v \in T_pS$ mit $g_p(v,v) = 1$. Für $\gamma\colon I \to S$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ heißt die Zahl

$$\kappa_n :\ = \langle \gamma''(0)\,,\, N(p)\rangle \tag{2.8.1}$$

***Normalkrümmung** von γ in p bzw. von S in p in Richtung v.*

Der nächste Satz sagt aus, daß sich die Normalkrümmung durch die zweite Fundamentalform berechnen läßt.

Satz 2.8 (Meusnier, Satz 3.6.1 in [1])**.**
Sei S eine eingebettete C^k-Fläche, $p \in S$, $v \in T_pS$ mit $g_p(v,v) = 1$ und $\gamma\colon I \to S$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.
Dann gilt

$$\kappa_n = g_p(v, W_p(v)) = II_p(v,v). \tag{2.8.2}$$

Insbesondere hängt also die Normalkrümmung von γ in p nur von $\gamma'(0)$ ab.

Beweis. Da die Kurve γ in S verläuft gilt

$$\forall t \in I: \qquad \langle \gamma'(t)\,,\, N(\gamma(t))\rangle = 0$$

Wir leiten nach dem Parameter ab und setzen $t = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle \gamma'(t)\,,\, N(\gamma(t))\rangle\Big|_{t=0} \\ &= \langle \gamma''(0)\,,\, N(p)\rangle + \langle \gamma'(0)\,,\, \frac{d}{dt}N(\gamma(t))\Big|_{t=0}\rangle \\ &= \langle \gamma''(0)\,,\, N(p)\rangle + \langle v\,,\, -W_p(v)\rangle \end{aligned}$$

also

$$\langle \gamma''(0)\,,\, N(p)\rangle = \langle v\,,\, W_p(v)\rangle$$

□

Bemerkung 2.8.
Ein paar Bemerkungen zur Normalkrümmung und ihrer Berechnung.

1. *Der Fakt $g_p(v, v) = 1$ spielt im Beweis keine Rolle. Um von Normalkrümmung sprechen zu können, braucht man jedoch diese Bedingung.*

2. *Die Umkehrung der Orientierung der Kurve in S so ändert sich die Normalkrümmung nicht, da*

$$II_p(-v, -v) = II_p(v, v).$$

Ändert man allerdings die Orientierung von S, so ändert sich das Vorzeichen von der Weingartenabbildung W_p und damit auch das Vorzeichen von II_p, bzw. sehen wir dies sofort aus der Definition (2.8.1).

Bemerkung 2.9.

Definition 2.18. *Sei S eine eingebettete C^k-Fläche, $p \in S$, $v \in T_pS$ und $g_p(v,v) = 1$. Setze*

$$E_p = \mathrm{span}\{N(p), v\}.$$

Dann heißt $E_p + p$ ***Normalenschnitt*** *von S in p bzgl. v.*

Will man die Normalkrümmung berechnen, dann ist der folgende Hilfssatz manchmal nützlich. Die Krümmung der Kurve $S \cap (E_p + p)$ ist gerade die Normalkrümmung von S in p in Richtung v.

Hilfssatz 2.3.
Sei S eine orientierte eingebettete C^k-Fläche, $p \in S$, $v \in T_p$ und $g_p(v,v) = 1$. Dann ist $S \cap (E_p + p)$ eine reguläre C^k-Kurve, deren Krümmung in p genau $|g_p(v, W_p(v))|$ ist.

Beweis. Das sich $S \cap (E_p + p)$ parametrisieren läßt ist Übungsaufgabe.
Sei $\gamma\colon I \to S$ also eine solche Parametrisierung (nach der Bogenlänge) mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Dann muß $\gamma''(0) \in E_p$ sein und $\gamma''(0) \perp \gamma'(0)$. Damit ist also $\gamma''(0) \parallel N(p)$ und damit gilt

$$g_p(\gamma''(0), \gamma''(0)) = |\langle \gamma''(0)\,,\, N(p)\rangle|.$$

□

Übungsaufgabe 2.3 (Aufgabe 3.6.1 in [1]).
Beweisen Sie die Existenz der Parametrisierung γ im Beweis von Lemma 2.3.
Hinweis*: Satz über Implizite Funktionen.*

Beispiel 2.7.
Sei $S = \mathbb{S}^2$. *Dann schneidet* $E_p + p$ S *im Großkreis durch* p.
Dieser hat wie wir aus Kapitel 1 Wissen, Krümmung 1, *und damit gilt* $|g_p(v, W_p(v))| = 1$ *für alle* $v \in T_pS$.
Die Weingartenabbildung von S *ist* $W_p(v) = -v$. *Damit gilt dann* $g_p(v, W_p(v)) = g_p(v, -v) = -g(v, v) = -1$ *wenn* $g_p(v, v) = 1$.

Beispiel 2.8.
Wir betrachten den Zylinder $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. *Bei* $v = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ *schneidet* $E_p + p$ *den Zylinder in einem Kreis vom Radius* 1. *Also muß auch hier* $g_p(v, W_p(v)) = \pm 1$ *gelten.*
Die Weingartenabbildung hatten wir mit $W = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *berechnet. Damit gilt dann* $W(v) = -v$ *und damit* $g_p(v, W_p(v)) = -1$. *Bei* $v = \frac{\partial f}{\partial z}$ *ist der Normalschnitt eine Gerade, die natürlich Krümmung* 0 *hat. Es gilt* $W_p(v) = 0$ *und damit* $g_p(v, W_p(v)) = 0$.

Im folgenden Satz zeigen wir, daß jede Fläche lokal ein Graph über Ihrer Tangentialebene ist und daß II durch die Hessesche gegeben ist.

Satz 2.9.
Sei S eine orientierte eingebettete C^k-Fläche, $p \in S$. Dann ist S nahe bei p ein Graph über T_pM. Das heißt es gibt Umgebungen $\tilde{U}$ von 0 in T_pS, U von p in S und eine C^k-Funktion $h\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}$ mut

$$U = \{p + v + h(v)N(p) \colon v \in \tilde{U}\}.$$

Es gilt $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$ und $\mathrm{Hess}(h)(0) = II_p$.

2.9 Hauptkrümmungen, Gaußkrümmung und mittlere Krümmung

Es ist leicht einzusehen, daß $q_p\colon T_pS \to \mathbb{R}$, $q(v) = II_p(v,v)$ eine stetige Funktion ist. Damit nimmt Sie nach dem Satz von Weierstraß Maximum und Minimum auf der kompakten Kugel $\{v \in T_pS\colon\ g_p(v,v) = 1\}$ an und wir können die folgende sinnvolle Definition machen.

Definition 2.19 (Hauptkrümmungen)**.**
*Sei S eine orientierte eingebettete C^k-Fläche, $p \in S$. Die **Hauptkrümmungen** von S in p sind der kleinste und der gröss te Wert von $II_p(v,v)$ für alle $v \in T_pS$ mit $g_p(v,v) = 1$.*
Sie werden mit $\kappa_1 = \kappa_1(p)$ und $\kappa_2 = \kappa_2(p)$ bezeichnet.
*Falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$, so heißen die zugehörigen $v \in T_pS$ die **Hauptkrümmungsrichtungen**.*

Bemerkung 2.10.
Falls $\kappa_1 = \kappa_2$, so gilt $II_p(v,v) = \kappa_1$ für alle $v \in T_pS$ mit $g_p(v,v) = 1$. Es gibt dann keine ausgezeichnete Krümmungsrichtung.

Definition 2.20 (Krümmungslinie)**.**
*Sei S eine orientierte eingebettete C^k-Fläche. Sei $\gamma\colon I \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Falls $\gamma'(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heißt die γ **Krümmungslinie**.*

Satz 2.10.
Sei S eine orientierte eingebettete Fläche, $p \in S$. Die Hauptkrümmungen in p sind die Eigenwerte der Weingartenabbildung W_p und die Hauptkrümmungsrichtungen sind die zugehörigen Eigenvektoren.

Falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$, stehen die Hauptkrümmungsrichtungen orthogonal aufeinander.

Beweis. Es seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von W_p. Weiter seien v_1 und v_2 die zugehörigen Eigenvektoren. Es gilt also

$$W_p(v_1) = \lambda_1 v_1 \qquad \text{und} \qquad W_p(v_2) = \lambda_2 v_2.$$

Damit, da w_p bzgl. g_p selbstadjungiert ist,

$$g_p(v_1, \lambda_2 v_2) = g_p(v_1, W_p(v_2)) = g_p(W_p(v_1), v_2) = g_p(\lambda_1 v_1, v_2)$$

also $(\lambda_1 - \lambda_2) g_p(v_1, v_2) = 0$. Wenn nun $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann muß $g_p(v_1, v_2) = 0$ gelten.
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_p(v_1, v_1) = 1 = g_p(v_2, v_2)$. und $v_1 \perp v_2$. Sei $v \in T_p S$ und $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ mit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} II_p(v, v) &= g_p(v, W_p(v)) \\ &= g_p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2, \alpha_1 W_p(v_1) + \alpha_2 W_p(v_2)) \\ &= \lambda_1 \alpha_1^2 g(v_1, v_1) + 0 + 0 + \lambda_2 \alpha_2^2 g_p(v_v, v_2) \\ &= \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2. \end{aligned}$$

Davon sind λ_1 und λ_2 der größte bzw. kleinste Wert. Mit $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ ist $v = v_1$ und mit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ ist $v = v_2$. $\square$

Satz 2.11 (Rodriguez)**.**
Sei S eine orientierte eingebettete Fläche mit Gaußabbildung N. Sei weiter $\gamma\colon I \to S$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist γ genau dann eine Krümmungslinie auf S, wenn es eine Funktion $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{d}{dt}N(\gamma(t)) = \lambda(t)\gamma'(t).$$

In diesem Fall ist $-\lambda(t)$ die entsprechende Hauptkrümmung.

Beweis. Wir beweisen beide Richtungen getrennt.

[⇒] Sei γ eine Krümmungslinie, d.h. $\gamma'(t)$ ist eine Hauptkrümmungsrichtung für alle $t \in I$. Dann gilt nach Definition der Weingartenabbildung

$$\frac{d}{dt}N(\gamma(t)) = dN_{\gamma(t)}\gamma'(t) = -W_{\gamma(t)}\gamma'(t).$$

Da $\gamma'(t)$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, ist Sie ein Eigenvektor von W_p für alle $t \in I$ und es gilt $W_{\gamma(t)}\gamma'(t) = \kappa(t)\gamma'(t)$. Damit folgt

$$\frac{d}{dt}N(\gamma(t)) = -\kappa(t)\gamma'(t).$$

und $-\kappa(t)$ ist eine Hauptkrümmung für alle $t \in I$.

[⇐] Es sei γ eine Kurve mit

$$\frac{d}{dt}N(\gamma(t)) = -\lambda(t)\gamma'(t).$$

Da nach Definition der Weingartenabildung (s.o.) auch

$$W_{\gamma(t)}\gamma'(t) = \lambda(t)\gamma'(t). \tag{2.9.1}$$

Also ist $\gamma'(t) \in T_pS$ eine Hauptkrümmungsrichtung, da Sie ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda(t)$ ist.

$\square$

Definition 2.21 (Gaußkrümmung/Mittlere Krümmung).
Sei S eine orientierte eingebettete Fläche, $p \in S$ und κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen in p. Dann ist

*(i) die **Gaußkrümmung**von M in p gegeben durch*

$$K(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \mathrm{det}(W_p).$$

*(ii) die **mittlere Krümmung** von s in p ist*

$$H(p) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(W_p).$$

Bemerkung 2.11.
Ein paar Bemerkungen zur Gaußkrümmung und zur mittleren Krümmung:

1. *Kehrt man die Orientierung der Fläche um, d.h. man ersetzt das zugehörigen (stetige) Einheitsnormalenfeld N durch $-N$, dann wechselt auch W_p nach Definition das Vorzeichen. Die Eigenwerte von W_p, also κ_1 und κ_2 ändern damit auch das Vorzeichen. Die Hauptkrümmungsrichtungen bleiben dagegen erhalten.*

2. *Die Hauptkrümmungsrichtungen und die Hauptkrümmungslinien sind nach der letzten Bemerkung auch auf nicht orientierbaren Flächen definiert.*

3. *Nach der Vorletzten Bemerkungen sind die Hauptkrümmungen auf nicht orientierbaren Flächen nur bis auf ein Vorzeichen definiert.*

Definition 2.22.
Sei S eine orientierte eingebettete Fläche, $p \in S$. Mann nenn p genau dann

1. ***elliptisch**, falls $K(p) > 0$,*
2. ***hyperbolisch**, falls $K(p) < 0$,*
3. ***parabolisch**, falls $K(p) = 0$ aber $W_p \neq 0$, d.h. falls nur eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet.*
4. ***Flachpunkt**, falls $W_p = 0$, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.*

Satz 2.12.
Sei S eine eingebettete C^k-Fläche ($k \geq 3$) und $p \in S$ sowie $X_1, X_2 \in T_p$ eine ONB von T_pS. Sei weiter $N\colon W \to \mathbb{S}^2$ ein C^{k-1}-Einheitsnormalenfeld auf S, definiert in einer Umgebung W des Punktes p so, daß $\det(X_1, X_2, N(p)) > 0$.
Dann gibt es eine lokale Parametrisierung (U, f, V) von S um p so, daß

(i) $(0,0) \in U$, $f(0,0) = p$,

(ii) $g_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$,

(iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}(0,0) = 0$, $i, j, k = 1, 2$,

(iv) und es gilt

$$f(u) - p = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{i,j}(0,0) u_i u_j N(p) + \mathcal{O}(\|u\|^3).$$

Dabei sind $(g_{i,j})_{i,j}$ und $(h_{ij})_{ij}$ die lokalen Darstellungen der ersten bzw. zweiten Fundamentalform bzgl. der lokalen Parametrisierung (U, f, V).

Korollar 2.3.
Jede reguläre Fläche kann als Graph über ihrer Tangentialebene dargestellt werden. Die zweite Fundamentalform ist dann gegeben als die von der Hessematrix induzierte quadratische Form.

Korollar 2.4.
Wenn S der Graph einer C^k-Funktion ist, dann ist die zweite Fundamentalform gegeben durch die Hessematrix.

2.9.1 Geometrische Interpretation der Krümmung

Wenn S eine eingebettete C^k-Fläche ist, $k \geq 3$, dann kann Sie lokal um einen Punkt $p \in S$ über der Tangentialebene T_pS als Graph der Funktion

$$(u_1, u_2) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{i,j}(0,0) u_i u_j$$

angenähert werden.

1. Fall Sei $K(p) > 0$. Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{i,j}$ positiv oder negativ definit und somit wird S durch einen Paraboliden angenähert.

2. Fall Sei $K(p) < 0$. Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{i,j}$ indefinit, aber nicht ausgeartet. Somit wird S nahe p durch eine Sattelfläche approximiert.

3. Fall p **parabolisch**. Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{ij}$ ausgeartet, aber nicht die Nullmatrix. Damit wird S in der Nähe von p durch eine Zylinderfläche angenähert die durch das Verschieben einer Parabel entlang einer geraden erzeugt wird.

4. Fall p ist Flachpunkt. Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{i,j}$ die Nullmatrix und damit ist die Fläche bis auf Terme dritter Ordnung durch eine Ebene angenähert.

Aufgabe 3

Benutzen Sie die lokale Approximation von S um zu zeigen, daß für $K(p) > 0$ die Fläche in einer Umgebung von p ganz auf einer Seite der Tangentialebene liegt und für $K(p) < 0$ die Fläche in jeder noch zu kleinen Umgebung von p auf beiden Seiten der Tangentialebene liegt.
Im Fall $K(p) = 0$ (parabolisch und Flachpunkt) kann man keine Aussage treffen. Geben Sie Beispiele für alle möglichen Fälle an.

2.10 Flächeninhalt und Integration auf Flächen

3

Die innere Geometrie von Flächen

Unser Ziel ist es zu zeigen , daß die Gaußkrümmung einer Größe der inneren Geometrie ist. Das ist keinesfalls offensichtlich, da K durch κ_1 und κ_2 definiert sind, die keine inneren Größen sind. Wir werden im Folgenden allerdings eine Formel für K finden, die nur von $(g_{ij})_{ij}$ abhängt, dies ist das berühmte Teorema Egregium von Gauß.

Stellen wir uns vor, daß wir in einer Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ leben und nicht aus ihr herausschauen können. Wir kennen also keine dritte Dimension in etwas so, wie wir eine vierte Dimension nicht kennen. Die Frage ist dann, ob man durch Längen und Winkelmessung innerhalb der Fläche feststellen können, in welcher Art Fläche wir leben. Wir wissen, daß sich Flächen wie die Sphäre deutlich von der Ebene unterscheiden. Die Sphäre kann nicht in die Eben eingebettet werden ohne die Längen zu verzerren. (Dies werden wir später beweisen.) Wenn wir ein Blatt Papier zu einer Rolle rollen, dann bleiben die Längen erhalten, da ein Blatt Papier nicht elastisch ist. Wenn man in einer Eben lebt, kann man diese also nicht von einem Zylinder unterscheiden. Damit ist die Antwort auf unsere Frage im allgemeinen *Nein*, denn es gibt verschiedene Flächen, die von innen betrachtet gleich aussehen. Dies werden wir nun mathematisch korrekt formulieren und untersuchen.

3.1 Isometrien

Definition 3.1 (Isometrie).
Es seien $S, S' \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei Flächen mir zugehörigen ersten Fundamentalformen g_p und g'_p für $p \in S$. Eine C^k-Abbildung $f\colon S \to S'$ heißt Isometrie, wenn f bijektiv ist und

$$g_p(X,Y) = g'_{f(p)}((df)_p(X)\,,\,(df)_p(Y))$$

für alle $p \in S$ und $X, Y \in T_pS$.

Bemerkung 3.1.
Fü $X = Y$ in der Definition erhalten wir mit $\|X\|^2 = g_p(X, X)$, daß $(df)_p$ längenerhaltend ist, also daß $\|X\| = \|(df)_p(X)\|$ gilt.
Da eine symmetrische Bilinearform durch seine quadratische Form eindeutig festgelegt ist, ist diese Bedingung äquivalent zur Definition.

Hilfssatz 3.1.
Es seien $S, S' \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei Flächen mir zugehörigen ersten Fundamentalformen g_p und g'_p für $p \in S$. Eine bijektive Funktion $f\colon S \to S'$ ist genau dann Isometrie, wenn für alle Kurven γ in S gilt $L[\gamma] = L[f \circ \gamma]$.

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen separat.

[⇒] Wir setzen $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ und erhalten

$$\begin{aligned} L[\tilde{\gamma}] &= \int_a^b \|\tilde{\gamma}'(t)\| \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \|(df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = L[\gamma]. \end{aligned}$$

[⇐] Sei $p \in S$ beliebig und $\gamma\colon (\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ mit $\gamma'(0) = X$ für ein $X \in T_pS$. Es sei $\gamma\big|_T$ für alle $T \in (0, \varepsilon)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t &= L[\gamma_T] \\ &= L[f \circ \gamma_T] \\ &= \int_0^T \|(df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\| \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Wenn wir nun T als variabel auffassen und nach dieser Variable Ableiten, erhalten wir an der Stelle $T = 0$:

$$\frac{d}{dT}L[\gamma_T]\Big|_{T=0} = \|\gamma'(0)\| = \|X\|.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{d}{dT}L[f \circ \gamma_T]\Big|_{T=0} = \|(df)_{\gamma(0)}(\gamma'(t))\| = \|(df)_p(X)\|.$$

Damit haben wir $\|(df)_p(X)\| = \|X\|$.

□

Definition 3.2 (Intrinsischer Abstand)**.**
Sei S eine wegzusammenhängende Fläche, $p, q \in S$. Dann ist der (intrinsische) Abstand von p und q gegeben durch

$$d(p, q) = \inf_{\gamma\colon p \rightsquigarrow q} L[\gamma]$$

über alle Kurven γ in S mit Anfangspunkt p und Endpunkt q.

Wir bemerken ohne Beweis (Übung), daß (S, d) für eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und mit dem intrinsischen Abstand d eine metrischer Raum ist. Damit ist eine Isometrie im Sinne von Definition 3.1 auch eine Isometrie im Sinne metrischer Räume.
Damit haben wir vier äquivalente Definitionen von Isometrien:

(1) $g_p(X, Y) = g_{f(p)}((df)_p(X)\,,\,(df)_p(Y))$ für alle $X, Y \in T_pS$,

(2) $\|X\| = \|(df)_p(X)\|$ für alle $p \in S$ und $X \in T_pS$,

(3) $L[\gamma] = L[f \circ \gamma]$ für alle Kurven γ in S,

(4) $d(p, q) = d'(f(p), f(q))$ für alle $p, q \in S$.

Bemerkung 3.2.
Aus (2) ⇒ (2) folgt, daß wenn f Längen erhält, dann erhält es auch Winkel. Aus (2) folgt, daß eine Isometrie ein Isomorphismus ist da nach (2) $(df)_p$ injektiv ist und damit bijektiv, da beide Flächen zweidimensional sind. Das f^{-1} glatt ist folgt dann aus dem Satz über die Umkehrfunktion.

Satz 3.1.
Sei $f\colon S \to S'$ ein Diffeomorphismus. f ist genau dann eine Isometrie, wenn zu jeder lokalen Parametrisierung (U, φ, V) für die lokale Parametrisierung $\varphi' = f \circ \varphi$, $(U,)$

$$g_{ij}(u) = g'_{ij}(u)$$

für alle i, j und alle u. Dabei sind g_{ij} die Komponenten von g bezüglich φ und g'_{ij} die Komponenten von g' bezüglich φ'.

Definition 3.3 (Isometrische Flächen)**.**
*Wir nennen zwei C^k-Flächen **isometrisch**, falls eine Isometrie $f\colon S \to S'$ existiert.*
*Wir nennen S **flach**, wenn sie lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$ ist, d.h. für alle $p \in S$ gibt es eine Umgebung U von p die isometrisch ist zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.*

Definition 3.4 (Informelle Definition *Innere Geometrie*)**.**
Eine Größe, die für Flächen definiert ist, heißt eine Größe der inneren Geometrie, falls Sie unter Isometrie erhalten bleibt.
Größen können dabei Funktionen auf S, wie die Gaußkrümmung oder kompliziertere Objekte sein. Was unter erhalten bleiben genau zu verstehen ist, ist für jede Art von Gröss e anzugeben.

Beispiel 3.1.
Größen der inneren Geometrie sind beispielsweise:

- *Die Abstandsfunktion $d\colon S \times S \to \mathbb{R}$, da $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ für Isometrien.*
- *Längen von Kurven da $L[\gamma] = L[f \circ \gamma]$ für Isometrien.*
- *Flächeninhalt, da $\mathrm{vol}_2(f(A)) = \mathrm{vol}_2(A)$ für alle meßbaren $A \subseteq S$.*
- *Im allgemeinen ist jede Größe, die in lokalen Koordinaten allein mittels $(g_{ij})_{ij}$ bzw. Ableitungen davon berechnet werden kann, eine Größe der inneren Geometrie.*
- *Die Gauß-Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.*
  (Noch zu zeigen, Teorema Egregium.)

3.2 Vektorfelder und kovariante Ableitung

In dieser Sektion wollen wir uns mit der Ableitung von Vektorfeldern beschäftigen. Dabei geben wir die folgende Definition von Vektorfeld.

Definition 3.5 (Vektorfelder).
Sei S eine C^{k+1}-Fläche. Ein C^k-Vektorfeld auf S ist eine C^k-Abbildung $X\colon S \to TS$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_S$, wobei $\pi\colon TS \to S$ die kanonische Projektion ist. Den Raum aller C^k-Vektorfelder bezeichnen wir mit $C^k(S, TS)$.

Da wir nicht vollständig erklärt haben, was TS ist, ist es nicht klar, was eine C^k Abbildung $S \to TS$ eigentlich sein soll. Wenn S eine C^k Fläche ist ($k \geq 2$), dann ist TS eine 4-dimensionale C^k Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$. Wir wollen uns aber vorerst nicht weiter damit beschäftigen und erwähnen die Definition zur Vorbereitung auf weiterführende Vorlesungen. Für uns reicht es aus unter einem Vektorfeld eine Funktion $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit $X(p) \in T_pS$ für alle $p \in S$ zu verstehen.

Beispiel 3.2 (Gradientenfeld, Bsp. in [1]).
Es sei S eine C^{k+1}-Fläche und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine C^l-Funktion Funktion[a]*, $1 \leq l \leq k$. Die erste Fundamentalform g ist nicht ausgeartet*[b] *und darum gibt es für jeden Punkt $p \in S$ genau einen Vektor $v(p) \in T_pS$ mit der Eigenschaft*

$$(df)_p f(X) = g_p(v(p), X) \tag{3.2.1}$$

*für alle $X \in T_pS$. Dadurch wird das sogenannte **Gradientenvektorfeld** $v := \mathrm{grad}(f)$ definiert. Das das Feld von der Klasse C^{l-1} sehen wir in einem Moment. Erst diskutieren wir die zwei möglichen Ableitungsbegriffe.*

[a] d.h. die Funktion ist C^k in lokalen Koordinaten.

[b] da g_p für jedes $p \in S$ ein Skalarprodukt ist. Es gibt für alle $X \in T_pS \setminus \{0\}$ ein $Y \in T_pS \setminus \{0\}$ mit $g_p(X, Y) \neq 0$.

Als erstes wollen wir detaillierter klären, was es heißt, daß ein Vektorfeld $X\colon S \to TS$ von der Klasse C^k ist? Es gibt dabei zwei Sichtweisen:

- extrinsisch: Da $T_pS \subseteq \{p\} \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ ist X auch eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}^3$ und wir wissen dann, was wir unter C^k-Regularität zu verstehen haben.

- intrinsisch: Wenn $\varphi\colon U \to S$ eine lokale Karte ist, dann kann man für jedes $u \in U$ schreiben

$$X_p = X(p) = X_1(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) + X_2(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u).$$

  Dann ist X von der Klasse C^k wenn $X_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ von der Klasse C^k sind. (Die $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ sind die $D\varphi(u)e_i$, also die Bilder der Standardbasis in $\mathbb{R}^2_u$. Man schreibt auch oft $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ohne Referenz zu der konkreten Parametrisierung.)

Beispiel 3.3 (siehe Beispiel 4.3.2 in [1]).
Fortführung Beispiel 3.2. Wir zeigen, durch lokale Darstellung (intrisisch), daß das Gradientefeld $p \mapsto v(p)$ von der Klasse C^k ist. Sei also $\varphi\colon U \to S$ weiterhin die lokale Parametrisierung um p mit $\varphi(u) = p$. Wir setzen $\tilde{f} = f \circ \varphi$ und rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u_k}(u) &= (df)_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)\right) \qquad \textit{(Kettenregel)}\\
&= g_p\left(\mathrm{grad}(f)(p)\,,\, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)\right)\\
&= g_p\left(X_1(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) + X_2(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)\,,\, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)\right)\\
&= X_1(u)g_{1k}(u) + X_2(u)g_{2k}(u).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial\tilde{f}}{\partial u_2}(u)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X_1(u) & X_2(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}$$

also

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X_1(u) & X_2(u) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

In anderen Worten:

$$X_k(u) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} g^{1k} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} g^{2k}.$$

Damit hat X_k genau eine Ableitung weniger als f, ist also C^{l-1}. Wenn alles glatt ist, dann zeigt diese Rechnung natürlich, daß das Gradientenfeld glatt ist.

Vektorfelder sind im wesentlichen Differentialoperatoren erster Ordnung, wie wir sehen werden. Wir beginnen mit folgender natürlicher Operation.

Definition 3.6 (Richtungsableitung von Funktionen)**.**
Sei $X \in C^k(S, TS)$ und $f \in C^k(S)$. Dann ist die Funktion $X(f) \in C^{k-1}(S)$ definiert durch die Richtungsableitung von f in Richtung X, gegeben durch

$$X(f)(p) = (df)_p(X_p).$$

Satz 3.2 (Rechenregeln)**.**
Seien $X, Y \in C^k(S, TS)$, $f, g, h \in C^1(S)$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(i) $(X + Y)(f) = Xf + Yf$,

(ii) $(hX)f = h(Xf)$,

(iii) $X(f + g) = Xf + Xg$,

(iv) $X(cf) = cXf$,

(v) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

Die Eigenschaften (i)(ii) sagen nichts anderes, als daß die Abbildung $(X, f) \mapsto Xf$ bzgl. $C^k(S)$ linear in X ist ($C^1(S) \to C^0(S)$). Die Aussagen (iii),(iv) sagen, daß $(X, f) \mapsto Xf$ bzgl. $\mathbb{R}$ linear in f ($C^k(S, TS) \to C^k(S, TS)$).
Das Vektorfeld $hX \in C^k(S, TS)$ ist lokal durch $(fX)_p = h(p)X_p$ gegeben, als wird die Norm von X_p variabel mit $h(p)$ geändert.
Eine Abbildung $f \mapsto Xf$ mit den Eigenschaften (iii)-(v) wird auch **Derivation** genannt.

Wir stellen Xf in lokalen Koordinaten dar: Sei dazu $\varphi \colon U \to S$ eine Parametrisierung um $p \in S$. Dann ist

$$X_{\varphi(u)} = X_1(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) + X_2(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u).$$

Setze $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann ist

$$(Xf)(\varphi(u)) = X_i(u)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u_1} + X_2(u)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u_2}(u).$$

Damit können wir uns an den Beweis von Satz 3.2 machen. Die Punkte (i)-(iv) überlassen wir dabei der Leserin zur Übung.

Beweis. Da wir nach (i) Linearität in X haben genügt es die Aussage (v) für die Basis $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$ zu prüfen. Sei $X = \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, dann haben wir

$$\begin{aligned} Xf(\varphi(u)) &= (df)_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right) \\ &= \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u_i}(u) \\ &= \frac{\partial\tilde{f}}{\partial u_i}(u) \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir uns dem Ableiten von Vektorfeldern bzgl. anderer Vektorfelder widmen. Seien $X, Y \in C^k(S, TS)$. Wir wollen Y in Richtung X ableiten und wieder ein Vektorfeld auf S erhalten, dan heißt insbesondere, daß das abgeleitete Vektorfeld tangential zu S sein muß. Im Falle $S = \mathbb{R}^3$ stellt dies kein Problem dar

Definition 3.7.
Sei $S = 0 \times \mathbb{R}^2$ und $X, Y \in C^k(S, TS)$. Die Ableitung von Y in Richtung X ist dann definiert durch

$$(\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y)_p = (dY)_p(X_p).$$

Insbesondere ist $\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y \in C^{k-1}(S, TS)$.

Alternativ läßt sich die folgende Definition geben.

Definition 3.8 (Alternative Definition)**.**
Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X_p \in T_pS$, dann ist

$$(\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y)_p = \frac{d}{dt} Y_{\gamma(t)}\Big|_{t=0}.$$

Diese Definition ist insbesondere von Interesse, da Y nur auf der Kurve γ um $t = 0$ herum definiert sein muß. Setzen wir $Y = [Y_1, Y_2]^T = Y_1 e_1 + Y_2 e_2$, dann ist

$$\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y = \begin{bmatrix} X(Y_1) \\ X(Y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DY_1(X) \\ DY_2(X) \end{bmatrix}$$

wobei $X(Y_i)$ die Richtungsableitung von Y_i in Richtung X nach Definition 3.6 ist. Sei nun $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann betrachten wir

$$(\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y)_p = \frac{d}{dt} Y_{\gamma(t)}\Big|_{t=0}$$

für eine Kurve $\gamma\colon I \to S$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(t) = X_p \in T_pS$. Das Problem ist, daß $(\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y)_p$ nicht tangential zu S in p sein muß und damit durch die Ableitung kein Vektorfeld erzeugt wird.

Der Ausweg ist die Projektion in den Tangentialraum zu betrachten. Wenn $v \in \mathbb{R}^3$, dann ist $v = \langle v\,,\,N_p\rangle N_p + (v - \langle v\,,\,N_p\rangle N_p)$ die Zerlegung von v in einen Vektor parallel und orthogonal zu N in p.

Definition 3.9 (Kovariante Ableitung)**.**
Sei S eine C^k-Fläche und $X, Y \in C^k(S, TS)$. Die ***kovariante Ableitung*** *von Y in Richtung X ist das (tangentiale) Vektorfeld $\nabla_X Y \in C^{k-1}(S, TS)$ ist definiert durch*

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y) - \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y)_p\,,\,N_p\rangle N_p. \tag{3.2.2}$$

Da sich die Definition auf die extrinsische Größe N bezieht, müßen wir noch zeigen, daß ∇ eine Eigenschaft der inneren Geometrie der Fläche ist. Dazu brauchen wir noch ein wenig mehr Sprache. Zuerst ein paar Rechenregeln.

Satz 3.3 (Rechenregeln für ∇)**.**
Sei S eine C^{k+1}-Fläche und $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in C^k(S, TS)$, $f, g, h \in C^l(S)$, $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gelten

(i) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

(ii) $\nabla_{hX} Y = h\nabla_X Y$

(iii) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

(iv) $\nabla_X(hY) = (Xh)Y + h\nabla_X Y$ *(Produktregel)*

(v) Weiterhin ist ∇ mit der ersten Fundamentalform verträglich, d.h. für $X, Y, Z \in C^k(S, TS)$ gilt

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y,\, Z) + g(Y,\, \nabla_X Z). \tag{3.2.3}$$

Beweis. Der Nachweis dieser Regeln sei der Leserin zur Übung überlassen. als erstes rechnet man die Regeln für $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ nach und dann für ∇. □

Sei S eine Fläche und $\varphi\colon U \to S$ eine lokale Parametrisierung. Wenn Y ein Vektorfeld auf S ist, dann gilt

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}} Y = dY\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\Big) = \frac{\partial(Y\circ\varphi)}{\partial u_i} = \frac{\partial\tilde{Y}}{\partial u_i}.$$

In nachlässiger Schreibweise gilt also

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j} \tag{3.2.4}$$

für $Y = \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}$.

Definition 3.10 (Christoffel-Symbole)**.**
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine C^{k+1}-Fläche und weiter sei $\nabla\colon C^k(S,TS)\times C^k(S,TS) \to C^{k-1}(S,TS)$ die kovariante Ableitung von S. Sei $\varphi\colon U \to S$ eine lokale Parametrisierung um $p \in S$.
Dann sind die ***Christoffel-Symbole*** *(1. Art) von S (bzw. ∇) bzgl. φ definiert als die Funktionen $\Gamma^k_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$, $k = 1,2$, gegeben durch*

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} = \Gamma^1_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \Gamma^2_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \quad i,j = 1,2. \tag{3.2.5}$$

Wir benutzen die Definition der kovarianten Ableitung (3.2.2) um etwas genauere Information zu erhalten:

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \Gamma^2_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} &= \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\\ &= \nabla^{\mathbb{R}^3}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} - \Big\langle \nabla^{\mathbb{R}^3}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\, ,\, N\Big\rangle N\\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_j} - \Big\langle \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\, ,\, N\Big\rangle N,\end{aligned}$$

wobei wir (3.2.4) benutzt haben. Es gilt nun (siehe (2.6.2) und Definition 2.7.1)

$$\Big\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_j}(u)\, ,\, N(p)\Big\rangle = II_p\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\, ,\, \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big) = h_{ij}.$$

Damit gilt dann

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + h_{ij} N, \quad i,j = 1,2. \tag{3.2.6}$$

Dies ist gerade die Zerlegung von $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}$ in den tangentialen und normalen Anteil. Da nun, nach H.A. Schwarz $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial u_i}$ gilt, und auch $h_{ij} = h_{ji}$ gilt, folgt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Dies bedeutet

$$\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}. \tag{3.2.7}$$

Die Leserin beachte, daß im allgemeinen $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$ gilt.

Nun zeigen wir, daß es sich bei ∇ um eine Größe der inneren Geometrie handelt. Wir zeigen also, daß die Christoffel-Symbole, die ∇ ganz bestimmen, sich nur durch g_{ij} und seine Ableitungen ausdrücken läßt.

Satz 3.4.
Es sei S eine orientierte C^k Fläche und ∇ die kovariante Ableitung von S. Dann ist ∇ eine Größe der inneren Geometrie, genauer gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{2} g^{kl} \Gamma_{ijl}$$

mit

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right), \quad i,j,l = 1,2. \tag{3.2.8}$$

*Die Γ_{ijl} heißen auch **Christoffel-Symbole 2. Art**.*

Bemerkung 3.3.
Es lohnt sich nicht Formeln wie die für Γ_{ij}^k auswendig zu lernen. Wichtig ist nur,

daß ∇ durch g bestimmt und Γ durch eine Kombination erster Ableitungen von g gegeben ist.

Beweis. Wir setzen

$$\Gamma_{ijl} = g_p\Big(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\Big).$$

Auf Grund von (3.2.7) gilt $\Gamma_{ijl} = \Gamma_{jil}$. Dann gilt, da $g_{ij} = g_p\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big)$, für die Ableitungen von g_{ij} unter Verwendung von (3.2.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} &= \frac{\partial}{\partial u_l} g_p\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big)\\
&= g_p\Big(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big) + g_p\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big)\\
&= \Gamma_{lij} + \Gamma_{lji}
\end{aligned}$$

für die Richtungsableitung von g in Richtung $\frac{\partial\varphi}{\partial u_l}$. Damit gilt durch zyklische Vertauschung $i \to j \to l \to i$ der Indizes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} &= \Gamma_{lij} + \Gamma_{lji},\\
\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} &= \Gamma_{ijl} + \Gamma_{ilj},\\
\frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} &= \Gamma_{jli} + \Gamma_{jil}.
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} &= \Gamma_{ijl} + \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli} + \Gamma_{jil} - \Gamma_{lij} - \Gamma_{lji}\\
&= 2\Gamma_{ijl}
\end{aligned}$$

und damit

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right).$$

Nach Definition der Γ_{ij}^k (siehe (3.2.5)) haben wir

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijl} &= g_p\Big(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\Big)\\ &= g_p\Big(\sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_p\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{kl}.\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{ij1}\\ \Gamma_{ij2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\Gamma_{ij}^1\\ \Gamma_{ij}^2\end{bmatrix}$$

und damit ($g^T = g$)

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^l \Gamma_{ijl} g^{kl}.$$

□

Es drängt sich nun die Frage auf, ob man $\nabla_X Y$ intrinsisch geometrisch beschreiben kann. Dies geht.

3.3 Riemannscher Krümmungstensor und Theorema Egregium

Wie wir in den vorigen Kapiteln gesehen haben, können wir die erste und zweite Fundamentalform einer Fläche S berechnen, wenn eine lokale Parametrisierung gegeben haben. Umgekehrt kann man sich natürlich fragen, ob man aus gegebenen Funktionen $g_{ij}, h_{ij} \colon U \to \mathbb{R}$, $(g_{ij})_{ij}$, $(h_{ij})_{ij}$ symmetrisch und $(g_{ij})_{ij}$ pos. definit eine lokale Karte φ einer Fläche S bekommen kann, so daß $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ gerade die erste und weite Fundamentalform von S bzgl. dieser Karte sind?
Zuerst werden wir dazu Beziehungen zwischen φ und $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ zeigen. Die Formeln im folgenden Satz sind die Analoga für Flächen der Frenet-Formeln für Kurven. Man drückt die Ableitung von Tangential- und Normalvektoren mittels der Tangential- und Normalvektoren aus. Das T' in Satz 1.4 keine nT-Komponente hat liegt an der Parametrisierung nach der Bogenlänge. Für Flächen gibt es kein Analogon dazu.

Satz 3.5.
Wenn $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ die erste und zweite Fundamentalform einer C^k-Fläche bezüglich einer lokalen Parametrisierung $\varphi \colon U \to S$ sind, dann gilt für alle $i, j, k = 1, 2$:

(i) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{\alpha=1}^{2} \Gamma_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} + h_{ij} N,$$

(ii) $$\frac{\partial N}{\partial u_k} = - \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} h_{k\beta} g^{\beta\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\gamma}.$$

Beweis. Die Formel (i) haben wir im letzten Abschnitt schon gezeigt; siehe dazu (3.2.6). Die zweite Formel folgt aus der Definition der Weingartenabbildung

$$\frac{\partial N}{\partial u_k} = -W_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) = - \sum_{\gamma} w_k^{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\gamma} \tag{3.3.1}$$

da

$$w_{k^\gamma} = \sum_\beta h_{k\beta} g^{\beta\gamma}.$$

Siehe (2.7.2). □

Wenn $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ gegeben sind, dann sind die unbekannten Funktionen φ und N durch das System

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{\alpha=1}^2 \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} + h_{ij}N \\ \frac{\partial N}{\partial u_k} = -\sum\limits_{\beta,\gamma=1}^{2} h_{k\beta} g^{\beta\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial u_\gamma} \end{cases}$$

partieller Differentialgleichungen bestimmt, wenn es denn Lösbar ist.
Wir werden nun notwendige Bedingungen, 'Integrabilitätsbedingungen' dafür finden, daß eine Fläche S mit $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ existiert. Die folgenden Rechnungen werden grauenvoll! Das läßt sich beim lokalen arbeiten in der Differentialgeometrie nicht verhindern. Natürlich muß davon nichts auswendig gelernt werden. Es sollte aber verdaut werden, was vor sich geht.

Wir wollen nun aus den Gleichungen (i) und (ii) die φ-Ableitungen, N und $\frac{\partial N}{\partial u_k}$ eliminieren um eine Gleichung nur für die g_{ij} und h_{ij} zu erhalten. Nach dem Satz von H. A. Schwarz gilt

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^l}. \tag{3.3.2}$$

Wir leiten jetzt also (i) nochmal ab, bei beliebig fest gewählten i, j, l und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^j \partial u^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} + h_{jl}N \right) \\ &= \sum_\alpha \frac{\partial \Gamma_{jl}^\alpha}{\partial u_i} \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_\alpha} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} N + h_{jl} \frac{\partial N}{\partial u_l} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \left(\sum_k \Gamma_{i\alpha}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + h_{i\alpha} N \right) + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} N + h_{jl} \frac{\partial N}{\partial u_l} \\
&= \sum_k \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \left(\sum_k \Gamma_{i\alpha}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + h_{i\alpha} N \right) + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} N - h_{jl} \sum_k w_i^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u_i} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^k \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \left(\sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha h_{i\alpha} \right) N + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} N - h_{jl} \sum_k w_i^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u_i} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^k - h_{jl} \sum_k w_i^k \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \left(\sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha h_{i\alpha} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} \right) N
\end{aligned}
$$

Wegen (3.3.2) gilt

$$
\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^l} = 0
$$

also

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u_i} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^k - h_{jl} \sum_k w_i^k \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \left(\sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha h_{i\alpha} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} \right) N \\
&- \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u_j} + \sum_\alpha \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^k - h_{il} \sum_k w_j^k \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \left(\sum_\alpha \Gamma_{il}^\alpha h_{j\alpha} + \frac{\partial h_{il}}{\partial u_j} \right) N = 0.
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt

$$
\begin{aligned}
\sum_k &\left[\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u^j} + \sum_\alpha \left(\Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^k - \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^k \right) - \left(h_{jl} w_i^k - h_{il} w_j^k \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \\
&+ \left[\sum_\alpha \left(\Gamma_{jl}^\alpha h_{i\alpha} - \Gamma_{il}^\alpha h_{j\alpha} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial h_{il}}{\partial u_j} \right) \right] N = 0.
\end{aligned}
$$

Nun gilt aber, daß die $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ und N linear unabhängig sind. Damit müßen die Koeffizienten

$$
\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial u^j} + \sum_\alpha \left(\Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^k - \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^k \right) - \left(h_{jl} w_i^k - h_{il} w_j^k \right)
$$

und

$$
\sum_\alpha \left(\Gamma_{jl}^\alpha h_{i\alpha} - \Gamma_{il}^\alpha h_{j\alpha} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial h_{il}}{\partial u_j} \right)
$$

verschwinden.
Wir führen eine weitere Bezeichnung ein. Wir setzen

$$R^k_{lij} := \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial u^j} + \sum_\alpha \left(\Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^k_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{il}\Gamma^k_{j\alpha} \right), \tag{3.3.3}$$

insbesondere hängen die $R^k lij$ nur von $(g_{ij})_{ij}$ und seinen Ableitungen ab.
Es gilt

Satz 3.6 (Gauß-Gleichung)**.**
Es sei S eine Fläche und $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ die erste und zweite Fundamentalform respektive bzgl. einer lokalen Parametrisierung φ. Es seien die Christoffel-Symbole (2. Art) durch (3.2.8) gegeben und R^k_{lij} durch (3.3.3). Dann gilt für alle $i, j, k, l \in \{1, 2\}$

$$R^k_{lij} = \sum_m (h_{jl}h_{im} - h_{il}h_{jm})g^{mk}.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}
R^k_{lij} &= \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial u^j} + \sum_\alpha \left(\Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^k_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{il}\Gamma^k_{j\alpha} \right) \\
&= h_{jl}w^k_i - h_{il}w^k_j \\
&= h_{jl}\sum_m h_{im}g^{mk} - h_{il}\sum_m h_{jm}g^{mk} \\
&= \sum_m \left(h_{jl}h_{im} - h_{il}h_{jm} \right) g^{mk}
\end{aligned}$$

□

Satz 3.7 (Theorema Egregium, Gauß 1827)**.**
Sei S eine Fläche. Dann ist die Gaußkrümmung $K: S \to \mathbb{R}$ eine Größe

der inneren Geometrie und es gilt

$$K = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})_{ij}}.$$

Beweis. Da $h = Wg$ gilt folgt $K = \frac{\det(h)}{\det(g)}$. Da nun

$$h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} = \det(h) = R_{2121}$$

gilt, ist die Gaußkrümmung eine Größe der inneren Geometrie da sie sich mittels $(g_{ij})_{ij}$ und seiner Ableitungen ausdrücken läßt. $\square$

3.4 Parallelverschiebung und Geodätische

In diesem Abschnitt werden wir die geometrische Bedeutung von ∇ untersuchen. Dazu werden wir untersuchen, was es bedeutet, daß $\nabla_X Y = 0$ für zwei Vektorfelder X und Y.

Wir untersuchen zuerst ein einfaches Beispiel: Sei $S = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Dann ist $\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y = 0$ genau dann für alle Vektorfelder X, wenn das Vektorfeld Y konstant ist da dies nur geht, wenn DY die Nullmatrix ist.

Wenn S nun eine allgemeine Fläche ist, dann ist der Begriff *konstant* nicht wirklich sinnvoll, da die verschiedenen Y_p für verschiedene $p \in S$ in verschiedenen Räumen liegen.

Wir werden in Kürze sehen, daß, wenn die Gaußkrümmung $K \not\equiv 0$, kein Vektorfeld Y auf S existiert mit $\nabla_X Y = 0$ für alle Vektorfelder X.

Definition 3.11.
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine C^{k+1}-Fläche und $\gamma\colon I \to S$ eine Kurve. Ein C^k-Vektorfeld entlang γ ist eine C^k-Abbildung, die jedem $t \in I$ ein $X_t \in T_{\gamma(t)}S$ zuordnet. Dabei muß X nicht tangential an γ sein.

Definition 3.12.
Ein Vektorfeld X entlang einer Kurve $\gamma\colon I \to S$ heißt parallel *entlang γ, falls $\nabla_{\gamma'(t)} X = 0$ ist für alle $t \in I$.*

Übungsaufgabe 3.1.
Sei $S = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$. Nach Definition der kovarianten Ableitung $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ ist $\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\gamma'(t)} X = \frac{d}{dt} X$, also X parallel entlang γ genau dann, wenn X konstant ist.

Satz 3.8.
Sei $\gamma\colon I \to S$ eine parametrisierte Kurve, $t_0 \in I$ und $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$. Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld X entlang γ mit $X_{t_0} = X_0$.

Der Satz liest sich wie eine Aussage über ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen und genau das werden wir zeigen.

Beweis. Angenommen, daß $\gamma(I) \subseteq \varphi(U)$, d.h. die Kurve liegt in einer einzigen lokalen Parametrisierung $\varphi\colon U \to S$. Dann schreiben wir

$$X = \sum_j X_j \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, \quad \gamma'(t) = \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Dabei ist dann $X_j = X_j(t)$ gesucht und $a_i = a_i(t)$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} &= \nabla_{\sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \\ &= \sum_i a_i \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \\ &= \sum_i a_i \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} X &= \sum_j \nabla_{\gamma'} X_j \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \\ &= \sum_{j,k} \left(\frac{dX_j}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} + X_j \nabla_{\gamma'} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right) \\ &= \sum_k \left[X_k' + \sum_{j,k} X_j a_i \Gamma_{ij}^k \right] \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß wir die Richtungsableitung der Funktion X in Richtung γ' als $\gamma'(X) = \frac{dX_j}{dt}$ berechnen können.
Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$, $k = 1, 2$ mit $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$

$$\nabla_{\gamma'} X = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X_k' + \sum_{ij} X_j a_i \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von gew. Differentialgelichungssystemen sagt nun aus, daß für gegebenes X_{t_0} genau eine Lösung $\gamma\colon I \to S$ existiert.

Wenn $\gamma(I)$ nicht durch eine lokale Parametrisierung abgedeckt ist, dann wählen wir eine Überdeckung aus uns konstruieren das Vektorfeld X von lokaler Parametrisierung zu Parametrisierung. □

Definition 3.13.
Sei S eine C^{k+1} Fläche, $\gamma\colon I \to S$ eine parametrisierte C^k-Kurve, $t_0 \in I$ und $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$. Weiter sei X das eindeutig bestimmte parallele Vektorfeld entlang γ aus Satz 3.8 und $t_1 \in I$.
*Dann heißt sie Abbildung $P_{\gamma[t_0,t_1]}\colon T_{\gamma(t_0)}S \to T_{\gamma(t_1)}S$, die $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$ den Vektor $X_{t_1} \in T_{\gamma(t_1)}S$ zuordnet, **Parallelverschiebung** entlang γ.*

Hilfssatz 3.2.
Die Abbildung $P|_{\gamma[t_0,t_1]}$ aus Definition 3.13 ist eine lineare orthogonale Abbildung.

Beweis. Die Linearität ist klar aus dem Beweis von Satz 3.8 da der Lösungsoperator für lineare Differentialgleichungssysteme linear in den Anfangsdaten ist. Es bleibt noch die Orthogonalität, also

$$g_{\gamma(t_0)}(X_{t_0}\,,\,Y_{t_0}) = g_{\gamma(t_1)}(X_{t_1}\,,\,Y_{t_2})$$

zu zeigen. Wir zeigen dazu, daß $g_{\gamma(t)}(X_t, Y_t)$ konstant ist für $t \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{\gamma(t)}(X_t\,,\,Y_t) &= g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'}X_t\,,\,Y_t) + g_{\gamma(t)}(X_t\,,\,\nabla_{\gamma'}Y_t)\\ &= g_{\gamma(t)}(0\,,\,Y_t) + g_{\gamma(t)}(X_t\,,\,0) = 0.\end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.
Wenn X ein Vektofeld parallel entlang einer parametrisierten Kurve γ ist, dann ist $\|X\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(X_t\,,\,X_t)}$ konstant.

Wir wollen nun definieren, was 'Geraden' in einer Fläche sind, d.h. Kurven auf denen in der Fläche keine Richtungsänderung stattfindet. In anderen Worten, wir suchen Kurven γ für die γ' parallel entlang γ ist.

Definition 3.14.
Sei S eine C^{k+1} Fläche und $\gamma\colon I \to S$ eine parametrisierte C^k-Kurve. Dann heißt γ genau dann Geodäte, wenn

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

für alle $t \in I$ gilt, also falls γ' parallel entlang γ ist.

Satz 3.9 (Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten)**.**
Sei S eine C^{k+1} Fläche, $p \in S$, $v \in T_pS$.
Dann gibt es genau eine maximale Geodäte $\gamma_{p,v}\colon I \to S$ mit $\gamma_{p,v}(0) = p$ und $\gamma'_{p,v}(0) = v$. Dabei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, der maximale Definitionsbereich. Die Kurve γ hängt C^k von t, p und v ab.

Beweis. Wir schreiben $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ in lokalen Koordinaten, $\gamma(t) = \varphi(u_1(t), u_2(t))$ für die gesuchte Kurve und leiten ein Differentialgleichungssystem für die u_1 und u_2 her: Es gilt

$$\gamma'(t) = \sum_j u'_j \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

nach der Kettenregel. Damit ergibt sich

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u''_k + \sum_{ij} u'_i u'_j \Gamma^k_{ij}(u) = 0$$

genau wie im Beweis von Satz 3.8. Nach dem Existenz und Eindeutigkeitssatz existiert eine lokale Lösung die von den Anfangsdaten in geforderter Weise abhängt. Die Fortsetzung der Lösung auf das maximale Existenzintervall erfolgt nach Standard-Argumenten. (Übung) □

Satz 3.10 (Kürzeste Linien sind Geodäten)**.**
Sei S eine C^k-Fläche und $p, q \in S$ sowie $\gamma\colon [a, b] \to S$ eine Kurve von p nach q ($\gamma(a) = p$,$\gamma(b) = q$). Wenn für jede andere Kurve Kurve $\tilde{\gamma}$ von p nach q gilt

$$L[\tilde{\gamma}] \geq L[\gamma]$$

dann ist γ eine Geodäte.

Hilfssatz 3.3.
Es sei Y ein Vektorfeld entlang $\gamma\colon [0, L] \to S$. angenommen jedes Vektorfeld entlang γ mit $X_0 = X_L = 0$ gilt

$$\int_0^L g(X_t\,, Y_t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Dann ist $Y_t = 0$ für alle t.

Beweis. Angenommen $Y_{t_0} \neq 0$ für ein $t \in (0, L)$. Dann können wir $\rho\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ mit $\rho(t) \geq 0$, $\rho(0) = \rho(L) = 0$ und $\rho(t_0) > 0$ wählen. Mit $X_t = \rho(t)Y_t$ erhalten wir

$$g(X_t\,, Y_t) = \rho(t)\|Y\|^2 \geq 0$$

bzw. $g(X_{t_0}\,, Y_{t_0}) > 0$. Damit gilt aber dann auch

$$\int_0^L g(X_t\,, Y_t)\,\mathrm{d}t > 0$$

was ein Widerspruch ist. □

Satz 3.11.
Sei S eine C^k-Fläche. Jeder Punkt $p \in S$ hat eine Umgebung U mit

(i) zu je zwei Punkten $q, q' \in U$ gibt es genau eine Geodäte von q nach q', die in U verläuft.

(ii) Die Geodäte aus (i) ist der kürzeste Weg von q nach q' unter allen Wegen in S.

3.5 Der Satz von Gaussß-Bonnet

Literaturverzeichnis

[1] Christian Bär *Elementare Differentialgeometrie*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010, ISBN: 978-3-11-022458-0.

[2] Gerd Fischer *Lineare Algebra*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1979, ISBN: 3-528-17217-7.

[3] Andrew Pressley *Elementary Differential Geometry*, Springer Verlag, 2010, ISBN: 978-1-84882-890-2

[4] J. A. Thorpe *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer Verlag, ISBN 978-1-4612-6155-1