Mathematik für Ingenieure 1

Christian P. Jäh*

WS 2020/21

*christian.jaeh@mathematik.uni-goettingen.de

Vorwort

Wie ist dieses Skript in Begleitung zur Vorlesung zu lesen? Wie sie unschwer erkennen, enthält das Skript mehr Informationen als in der Vorlesung besprochen werden können. Themengebiete die wir in der Vorlesung oder Übung nicht besprechen, sind nicht direkt prüfungsrelevant sollten aber, um Ihre Ausbildung abzurunden und sich gut auf die Zukunft vorzubereiten, dennoch durchgearbeitet werden; beim ersten Lesen können Sie problemlos übersprungen werden. – Nicht alles was Sie im Leben brauchen werden, wird in Vorlesungen gelehrt. Wenn die Vorlesungen gut laufen, dann befähigen sie Sie, sich das notwendige Wissen/die notwendigen Fähigkeiten zur Lösung eines vorgelegten Problems wenn benötigt anzueignen. Ohne Hintergrundwissen ist eine erfolgreiche Bearbeitung echter Probleme jedoch im wesentlichen aussichtslos.

In diesem Sinne: Sie lernen das Material hier nicht, um eine Prüfung zu bestehen. Sie lernen es um Ihre mentale Werkzeugkiste zu erweitern und die hier vermittelten Methoden und Prinzipien in der Welt zu sehen und beispielsweise in der Modellierung anzuwenden. Das sollte auch klar machen, wieso man Mathematik nicht allein an Beispielen lernen kann. Beispiele illustrieren, gelernt werden müssen die abstrakten Ideen. Ansonsten können Sie in Anwendungen nie oder zumindest schwerlich über die betrachteten Beispiele hinaus denken.

Kenntnisse aus Kapitel 1 werden vorausgesetzt. Beginnen Sie dann mit Kapitel 3, und schauen Sie, wann immer nötig, zu Kapitel 2. In Kapitel 3 lassen Sie die Besprechung von *limes superior* und *limes inferior* aus; In Kapitel . Beim ersten Lesen können sie auch die Beweise überspringen. Beim zweiten Lesen müssen Sie die Beweise natürlich nicht auswendig lernen; Sie sollten aber die Ideen und Zusammenhänge begreifen; wenn Sie etwas nicht verstehe, schreiben Sie sich die Frage auf. Im besten falle haben Sie ein Notizheft, daß Sie für solche Fragen führen. Wenn Sie sich mit anderen Studierenden treffen können Sie die Fragen stellen bzw. können Sie so auch selbst besser nachdenken da Sie die Fragen nicht einfach vergessen. Sollten Sie sie nicht selbst beantworten können, können Sie sie dann mit mir oder in der Nachhilfe, etc. besprechen.

Beim Lesen sollten Sie immer Papier und Bleistift zur Hand haben; Sie können die Inhalte nicht verdauen, wenn Sie sie nur mehrmals "lesen". Siehe dazu bspw. [2]. Gehen Sie die Beispiele durch indem Sie sich die Aufgabenstellung aufschreiben und sich dann selbst versuchen. Wenn Sie nicht weiter kommen schauen Sie nach einem Hinweis und versuchen es weiter selbst. Am Ende der Kapitel und verstreut in den Kapiteln finden Sie weitere Übungsaufgaben die Sie alle bearbeiten sollten.

Zur Organisation des selbstbestimmten Lernens:

- bspw. [1, 4] und [11].
- Der Artikel *The nine secrets of learning* der APA (American Psychological Association), den Sie hier finden können, enthält auch nützliche Informationen und weitere Zitate wissenschaftlicher Arbeiten zum Hintergrund.

Inhaltsverzeichnis

Wie lernt (studiert) man Mathematik?

- **Lesen Sie sorgfältig und mit Bedacht.**

  Sie müssen Mathematik ganz anders lesen als ein Magazin, einen Roman oder sogar ein anderes Sachbuch. Sie müssen langsam lesen und jede Zeile aufnehmen. Das Lernen der Definitionen darf nie mechanisch sein; es muß Ihnen stets ein Bedürfnis sein den Inhalt der Definitionen zu verstehen. Wieso sind die Elemente der Definition wie sie sind? Wieso ist dieses positiv und jenes ein 'kleiner-gleich´ etc. pp..
  Versuchen Sie die Situation geeignet bildlich darzustellen, konstruieren Sie eingenständig Beispiele und Nichtbeispiele. Benutzen Sie Papier und Bleistift zum Denken!
  Lesen Sie den Text nicht einfach passiv immer und immer wieder. Das bringt nichts; siehe [2].

  > Mastering the lecture or the text is not the same as mastering the ideas behind them. However, repeated reading provides the illusion of mastery of the underlying ideas. Don't let yourself be fooled. The fact that you can repeat the phrases in a text or your lecture notes is no indication that you understand the significance of the precepts they describe.
  > (Make It Stick: The Science of Successful Learning)

- **Denken Sie mit Bleistift und Papier.**

  Wenn Sie an einer Übungsaufgabe sitzen und keine Idee haben, bleiben Sie nicht untätig. Lassen Sie den Bleistift über das Papier gleiten. Versuchen Sie systematisch zu sein (siehe auch letzten Punkt und Seite xiv):

  1. Schreiben Sie auf, was Sie zeigen wollen.
  2. Schreiben Sie auf, was Sie wissen.

3. Was kann man direkt aus dem ableiten, was gegeben ist. Was sind die bekannten Sätze zum Thema? Gibt es eine Identität oder eine Ungleichung die helfen kann?
4. Denken Sie über eine mögliche Strategie nach und versuchen Sie dann diese in die Tat umzusetzen.
5. Haben Sie alle verfügbaren Informationen benutzt?

Ein weiterer guter Grund möglichst Gedanken zu Papier zu bringen ist, daß man Ihnen dann viel besser helfen kann. Eventuell haben Sie einfach etwas übersehen und ein kleiner Hinweis von mir oder einem Übungsleiter kann Sie schon auf den Pfad der Erkenntnis setzen. Sie sollten sich nicht selbst das Gefühl rauben die Aufgaben zu lösen indem Sie immer sofort nach der ganzen Lösung fragen. Durch das Lesen von Lösungen werden Sie nicht lernen Aufgaben zu lösen. Das Sie die Lösungen nachvollziehen können, glauben wir auch so, Sie sind schließlich hier. Es kommt aber darauf an sie zu produzieren. Und das ist nun mal wie mit einem Marathon. Ohne Training wird das nichts und vom bloßen zuschauen werden Sie eher noch schlechter.

- **Seien Sie eigenständig.**

  Eigenständig zu sein meint nicht, daß Sie gar keine Fragen stellen sollen. Sie sollten jedoch darauf achten, daß Sie nicht jede Kleinigkeit nachfragen und stets einen ernsthaften Versuch unternehmen, die Frage selbst zu *beantworten*. Wenn Sie eine Frage haben, sollten Sie stets einen eigenen Ansatz haben. Ich werde Ihnen nicht einfach vollständige Lösungen zu Aufgaben außerhalb der Hausaufgaben geben.

- **Halten Sie durch.**

  Sie müssen darauf achten, daß Sie nicht frustriert werden nur weil ein Thema oder eine Aufgabe Sie für den Moment verwirrt. *Stick with it!* Es ist eine sehr interessante Eigenschaft der Mathematik, daß man in einem Moment total verloren scheint und dann, plötzlich, eine Einsicht und man versteht nicht mehr, was an dem Problem eigentlich so schwer war. Wenn Sie mit einer Aufgabe keine Fortschritte erzielen, dann legen Sie sie beiseite und versuchen Sie es später nochmal. Oft werden Sie erleben, daß Sie die Lösung beim zweiten oder dritten Anlauf direkt sehen, selbst wenn sie nicht bewußt über das Problem nachgedacht haben.

- **Nehmen Sie sich Zeit zum reflektieren.**

  Um Mathematik gut zu lernen, müssen Sie sich Zeit zum reflektieren des Materials der letzten Wochen geben. Manche Ideen brauchen einfach eine gewisse Zeit bis Sie sich gesetzt haben. Manchmal müssen Sie eben eine Weile mit dem Gefühl leben, etwas nicht oder nicht ganz verstanden zu haben.

- **Konzentrieren sie sich auf das Wesentliche.**

  Versuchen Sie nicht Mathematik durch das Lernen von illustrativen Beispielen zu lernen.[1] Es wird nicht lange dauern, da wird Sie dieser Zugang elende überfordern und je weiter wir im Stoff vordringen, desto weniger erfolgreich werden Sie sein.

  Die gesamte Mathematik basiert auf ein paar fundamentalen Prinzipien und Definitionen. Einige davon muß man natürlich auswendig lernen. Wenn Sie sich auf diese Fundamentals konzentrieren und versuchen zu verstehen, wie jedes neue Kapitel eine Wiederanwendung dieser Prinzipien ist, dann muß man sehr wenig zusätzliche Erinnerungsarbeit leisten.[2]

- **Benutzen Sie Heuristiken.**[3]

  Wenn Sie an einer Aufgabe sitzen, sollten Sie stets versuchen systematisch vorzugehen. Beispielsweise sollten Sie, wenn Sie nicht weiter wissen, sehen, ob es nicht ein einfacheres Problem gibt, welches dem vorliegen-

[1] Sie sollten aber stets ein paar gute Beispiele und Gegenbeispiele im Hinterkopf haben.

[2] Beispiel: Wenn Sie verstehen, wie man Extrema von Funktionen einer Variable findet, dann ergeben sich die entsprechenden Resultate für den multivariaten Fall nahezu von selbst.

[3] Heuristik ist das Studium von Mittel und Methoden zur Problemlösung.

den ähnelt. Es ist nicht immer einfach diese einfacheren Ersatzprobleme zu finden aber das kommt mit der Erfahrung.

Wenn sie zum Beispiel eine Funktion betrachten, die von einem Parameter abhängt, dann können Sie dem Parameter einen Wert zuordnen und die Aufgaben mit diesem Wert lösen. Nachdem Sie die Aufgabe zur Zufriedenheit gelöst haben, setzen Sie den allgemeinen Parameter ein und folgen Ihrem Beispiel Schritt für Schritt mit dem Parameter.

Viele weitere Beispiele finden Sie in [10] und [6]. Einige historische Bemerkungen sowie weitere Literaturhinweise finden Sie in [7].

Auf der nächsten Seite finden Sie einen Auszug aus Polyas Buch [10], welche einen Algorithmus zum Problemlösen zur Verfügung stellt. Die Schritte sind

1. Verstehen Sie die Aufgabe?
   Was ist gesucht und was ist gegeben? Wie sind die entsprechenden Objekte definiert.

2. Erarbeiten Sie einen Plan zur Lösung.
   Welche Relationen bestehen zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten. Welche Sätze könnten hilfreich sein?

3. Implementieren Sie den Plan.

4. Schauen Sie zurück.

Die Details zu jedem Schritt entnehmen Sie dem Text auf der genannten nächsten Seite.

HOW TO SOLVE IT

xvi

UNDERSTANDING THE PROBLEM

First.

You have to *understand* the problem.

What is the unknown? What are the data? What is the condition?

Is it possible to satisfy the condition? Is the condition sufficient to determine the unknown? Or is it insufficient? Or redundant? Or contradictory?

Draw a figure. Introduce suitable notation.

Separate the various parts of the condition. Can you write them down?

How To Solve It

DEVISING A PLAN

Second.

Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a *plan* of the solution.

Have you seen it before? Or have you seen the same problem in a slightly different form?

Do you know a related problem? Do you know a theorem that could be useful?

Look at the unknown! And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown.

Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it? Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?

Could you restate the problem? Could you restate it still differently? Go back to definitions.

If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem? A more general problem? A more special problem? An analogous problem? Could you solve a part of the problem? Keep only a part of the condition, drop the other part; how far is the unknown then determined, how can it vary? Could you derive something useful from the data? Could you think of other data appropriate to determine the unknown? Could you change the unknown or the data, or both if necessary, so that the new unknown and the new data are nearer to each other?

Did you use all the data? Did you use the whole condition? Have you taken into account all essential notions involved in the problem?

How To Solve It

CARRYING OUT THE PLAN

Third.

Carry out your plan.

Carrying out your plan of the solution, *check each step.* Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?

LOOKING BACK

Fourth.

Examine the solution obtained.

Can you *check the result?* Can you check the argument?

Can you derive the result differently? Can you see it at a glance?

Can you use the result, or the method, for some other problem?

xvii

Abbildung 1: Polyas Algorithmus stammt aus dem sehr lesenswerten Buch [10], *How to solve it.*

1

Logik. Mengen. Abbildungen

1.1 Bemerkungen zur Notation

Handgeschriebene Symbole vs. getippte (gesetzte). Ich tendiere in handgeschriebenen Notizen dazu, das Symbol ($\#$) zu benutzen um das Ende eines Beweises oder einer Rechnung, eines Beispiels etc. anzuzeigen. In den getippten Notizen, wird das Ende eines Beweises durch das Symbol $\square$ angezeigt und Beispiele werden farblich abgehoben. Wenn ich in einer Bemerkung ein kurzes Argument gebe, dann wird dessen Ende nicht extra angezeigt da dieses durch das Ende der Bemerkung klar ist. Für Widersprüche werden wir in den getippten Notizen kein Symbol verwenden sondern einfach angeben, daß wir einen Widerspruch erhalten. In handgeschriebenen Notizen, kann ein Blitz benutzt werden wenn klar ist, was genau an der Stelle gemeint ist. **Was Ihre Niederschrift der Hausaufgaben angeht, orientieren Sie sich bitte an der Notation, die wir in der Vorlesung verwenden.** Die mag sich durchaus von Schulnotation unterscheiden!

Das griechische Alphabet. (und seine Anwendung) Ich werde annehmen, daß jeder mit dem griechischen Alphabet vertraut ist und weiß wie man die Buchstaben liest (also ausspricht) und schreibt. Wenn Sie da noch Probleme haben, sollten Sie das üben. Auf der nächsten Seite finden Sie eine Tabelle mit den Buchstaben und ihren Namen. Wir werden diese insbesondere benutzen, wenn wir zwei verschiedene Objekte haben; beispielsweise Funktionen und Zahlen. Wir werden dann αf schreiben und die unterschiedlichen Alphabete sollen den Fakt unterstreichen, daß α und f verschiedene Dinge sind.

α	alpha	θ	theta	o	omikron	τ	tau
β	beta	ϑ	theta	π	pi	υ	upsilon
γ	gamma	γ	gamma	ϖ	pi	ϕ	phi
δ	delta	κ	kappa	ρ	rho	φ	phi
ϵ	epsilon	λ	lambda	ϱ	rho	χ	chi
ε	epsilon	μ	mu	σ	sigma	ψ	psi
ζ	zeta	ν	nu	ς	sigma	ω	omega
η	eta	ξ	xi				
Γ	Gamma	Λ	Lambda	Σ	Sigma	Ψ	Psi
Δ	Delta	Ξ	Xi	Υ	Upsilon	Ω	Omega
Θ	Theta	Π	Pi	Φ	Phi		

Tabelle 1.1: Griechische Buchstaben

1.2 Logik

1.2.1 (Logische) Propositionen

Wir werden die Begriffe **und** und **oder** einführen und klarstellen, wie diese durchweg in diesem Text zu verstehen sind.
In dem was folgt, meinen wir mit Proposition **Träger eines Wahrheitswertes**, d.h. es ist eine Aussage, die entweder den Wert WAHR (TRUE) oder FALSCH (FALSE) hat. Zum Beispiel: Die Aussage **Naürliche Zahlen sind durch** 2 **teilbar.** ist eine Proposition mit dem Wahrheitswert FALSCH.

1.2.2 Die Konjunktionen UND und ODER

In der deutschen Grammatik sind **und** und **oder** Konjunktionen. Mithilfe der Konjunktionen (Verbindungswörter) **und** und **oder** kann man innerhalb eines Satzteils (einer Ergänzung) zwei Wörter oder Wortgruppen verbinden. Mit **und** werden zwei oder mehr Wörter bzw. Satzteile aneinandergereiht und, wenn man eine bedingte Aussage macht, dann ist diese WAHR, wenn beide mit **und** verbundenen Aussagen WAHR sind.

In Formelsprache: Seien P und Q zwei Propositionen. Dann schreiben wir für die Konjunktion P **und** Q in Symbolen $P \wedge Q$. Dies ist eine neue Proposition und diese ist WAHR wenn sowohl P als auch Q wahr sind. Ansonsten ist sie FALSCH. Wir können dies in einer Wahrheitstabelle zusammenfassen:

P	Q	$P \wedge Q$
$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$
$WAHR$	$FALSCH$	$FALSCH$
$FALSCH$	$WAHR$	$FALSCH$
$FALSCH$	$FALSCH$	$FALSCH$

.

Während oder in der Mathematik im wesentlichen so verwendet wird wie in der Alltagssprache, muß man mit **oder** etwas vorsichtiger sein. Einige Grammatiken sagen zwar das oder immer meint, daß sich die Alternativen gegenseitig ausschließen aber, wie Sie sicher aus eigener Erfahrung wissen, ist das auch nicht immer der Fall; die Bedeutung hängt oft vom Kontext ab. In der Mathematik verwenden wir **oder** nicht in der ausschließenden Bedeutung, d.h. die Aussage kann auch wahr sein, wenn beide Proposition wahr sind. Die umgangssprachliche Bedeutung von **oder** als **entweder oder** wird **exklusives oder** genannt. Wenn wir das meinen, dann werden wir **entweder** dazu sagen.

In Formelsprache: Seien P und Q zwei Propositionen. Dann schreiben wir für die Konjunktion P **oder** Q in Symbolen $P \vee Q$. Dies ist eine neue Proposition und diese ist WAHR wenn mindestens eine der beiden Aussagen P und Q wahr sind. Wir können das in einer Wahrheitstabelle wie folgt zusammenfassen:

P	Q	$P \vee Q$
$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$
$WAHR$	$FALSCH$	$WAHR$
$FALSCH$	$WAHR$	$WAHR$
$FALSCH$	$FALSCH$	$FALSCH$

1.2.3 Negation

In der deutschen Grammatik ist die Negation der Prozess eine Affirmative Aussage in ihr oppositionelles Gegenteil zu verkehren. So auch in der Mathematik.

In Formelsprache: Sei P eine Proposition. Wir schreiben dann für **nicht** P die Symbole $\neg P$ oder $\overline{P}$. Die Wahrheitstabelle der Negation ist

P	$\neg P$
$WAHR$	$FALSCH$
$FALSCH$	$WAHR$

1.2.4 Implikation und Äquivalenz

Wir wollen klären, was es bedeutet, daß eine Proposition eine andere impliziert bzw., daß die logisch gleichwertig sind.

Typische Beispiele sind: P sei die Aussage, daß es regnet und Q sei die Aussage, daß die Straße naß ist. Dann gilt P impliziert Q. Die Umkehrung ist nicht wahr, da jemand einen Eimer Wasser auf die Straße gekippt haben könnte. Es gibt also mindestens eine Situation in der die Straße naß ist und es nicht geregnet hat. Die Aussage P impliziert Q ist nur dann falsch, wenn P WAHR und Q FALSCH ist.

In Formelsprache: Es seien P und Q Propositionen. Für P impliziert Q schrieben wir dann $P \Rightarrow Q$. Wir können $P \Rightarrow Q$ in einer Wahrheitstabelle wie folgt zusammenfassen:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$
$WAHR$	$FALSCH$	$FALSCH$
$FALSCH$	$WAHR$	$WAHR$
$FALSCH$	$FALSCH$	$WAHR$

Das $P \Rightarrow Q$ stets WAHR ist wenn P FALSCH ist, reflektiert die Aussage, daß aus falschen Annahmen alles geschlussfolgert werden kann und daß aus wahren Aussagen keine falsche geschlußfolgert werden kann.

Sprachregelung: Wenn für Propositionen P und Q die Aussage $P \Rightarrow Q$ gilt, dann heißt P **hinreichend** für Q und Q heißt **notwendig** für P.

Wenn für zwei Proposition $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow P$ gilt, dann heißen die Propositionen (logisch) äquivalent.
In Formelsprache: Für zwei Propositionen P und Q schreiben wir $P \Leftrightarrow Q$, wenn P und Q logisch äquivalent sind.

Sprachreglung: Wenn für zwei Propositionen P und Q die beiden Aussagen $P \Leftrightarrow Q$ gilt, dann heißt P **notwendig und hinreichend** für Q und vice versa. Für $P \Rightarrow Q$ schreiben wir auch P **genau dann, wenn** Q bzw. P **gdw.** Q. Beachten Sie, daß in Definitionen, die Äquivalenz per Definition eingeführt wird. Eine Seite ist Bedeutungslos bevor nicht gesagt wird, was sie meint. Siehe dazu beispielsweise Definition 3.6, wo das Symbol $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ erklärt wird.

Die Wahrheitstabelle von $P \Leftrightarrow Q$ fasst die Werte zusammen:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$
$WAHR$	$FALSCH$	$FALSCH$	$WAHR$	$FALSCH$
$FALSCH$	$WAHR$	$WAHR$	$FALSCH$	$FALSCH$
$FALSCH$	$FALSCH$	$WAHR$	$WAHR$	$WAHR$

Übungsaufgabe 1.1.
Rechnen Sie die obige Tabelle nach.

1.2.5 Rechenregeln

Es gilt natürlich $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$, wie die Leserin leicht überprüft. Die nächsten zwei Übungsaufgaben behandeln wichtige Regeln für den Umgang mit logischen Operationen.

Übungsaufgabe 1.2.
Beweisen Sie die Aussagen

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

und

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

durch das Aufstellen der entsprechenden Wahrheitstafeln.

Eine weitere wichtige Äquivalenz ist die sogenannte **Kontraposition**. Diese wird oft in Beweisen angewendet.

Übungsaufgabe 1.3.
Zeigen Sie, daß die Aussage

$$(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

gilt indem Sie die entsprechenden Wahrheitstabelle(n) aufstellen.

Bemerkung 1.1.
Zwei wichtige Bemerkung. Die erste behandelt einen oft gemachten Fehler die Kontraposition nicht richtig zu bilden.

1. *Die Leserin mache sich klar, daß* $\neg P \Rightarrow \neg Q$ *nicht zu* $P \Rightarrow Q$ *äquivalent ist. Die Aussage* $\neg P \Rightarrow \neg Q$ *heißt Inversion von* $P \Rightarrow Q$.

2. *Die Aussage* $Q \Rightarrow P$ *heißt Konversion (Umkehrung) von* $P \Rightarrow Q$. *Wie oben diskutiert gilt* $P \Leftrightarrow Q$, *wenn* $P \Rightarrow Q$ *und seine Konversion WAHR sind.*

Wir fassen die Rechenregeln für UND und ODER in einem Satz zusammen:

Satz 1.1 (Rechenregeln für UND und ODER)**.**
Es seien P, Q und R Proposition.

(i) Kommutativität:

$$P \wedge Q = Q \wedge P,$$
$$P \vee Q = Q \vee P.$$

(ii) Assoziativität:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \vee Q) \wedge R,$$
$$P \vee (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \vee R.$$

(iii) Distributivität:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$$
$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Übungsaufgabe 1.4.
Beweisen Sie den Satz 1.1 mit Wahrheitstafeln. Da das etwas länger ist, habe ich hier nicht den notwendigen Platz gelassen. Heften Sie einfach ein entsprechendes Blatt dazu.

1.3 Mengen

Wir nehmen den naiven Standpunkt ein und zitieren, zur Definition einer Menge im Sinne dieser Vorlesung, den Gründer der Mengenlehre Georg Cantor:

> Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Mit **wohlunterschieden** meinen wir, daß eine mehrfache Auflistung des gleichen Elements nichts ändert. Beispiel:

$$\{1,2,3\} = \{1,1,2,3\}.$$

Das m ein Element von M ist drücken wir durch $m \in M$ aus.

Wenn wir die Eigenschaften der Objekte m einer Menge M durch eine Eigenschaft (Präposition) $P(m)$ ausdrücken können, dann schreiben wir

$$\begin{aligned} M &= \{x\colon\ P(x)\}, \\ &= \{x\colon\ x \text{ hat Eigenschaft } P\} \end{aligned}$$

Damit meinen wir, daß M aus allen Elementen x besteht, für die $P(x)$ WAHR ist. Beispiel

$$\begin{aligned} M &= \{n\colon\ n \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\} \\ &= \{2,4,6,8,10,...\}. \end{aligned}$$

Die Menge die keine Elemente enthält wird leere Menge genannt und mit $\emptyset$ bezeichnet. Die leere Menge ist für viele Studierende am Anfang ein Mysterium, da man Sie heranziehen kann um so ziemlich alles zu zeigen. Beispielsweise sind alle Elemente der leeren Menge durch 2 teilbar. Diese Aussage ist WAHR, weil $x \in \emptyset$ eine FALSCHe Aussage ist.

Wir führen als nächstes den Begriff der Teilmenge ein und danach die Rechenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement.

Definition 1.1 (Teilmenge)**.**
Sei A eine Menge. Die Menge B heißt genau dann ***Teilmenge*** *(Untermenge) von A, in Zeichen $A \subseteq B$, wenn für alle $a \in A$ folgt $a \in B$.*
Wenn B ein Element enthält das nicht in A ist, dann heißt A ***echte Teilmenge*** *von B, in Zeichen $A \subset B$.*

Sprachregelung: Wenn $B \subseteq A$ (oder $B \subset A$) für zwei Mengen A und B gilt, dann nennen wir A auch **Obermenge** von B.

Für die Teilmengenrelation gelten die folgenden anschaulichen Aussagen. Die Leserin ist wieder eingeladen, die Aussagen zu zeigen.

Hilfssatz 1.1 (Eigenschaften von $\subseteq$)**.**
Es seien A, B und C Mengen. Dann gilt

(i) $\emptyset \subseteq A$.

(ii) $A \subseteq A$

(iii) Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$. *(Transitivität)*

(iv) Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

(v) Es gilt $A \subseteq B$ genau dann, wenn $A \cap B = A$ gilt.

(vi) Es gilt $A \subseteq B$ genau dann, wenn $A \cup B = B$ gilt.

Bemerkung 1.2.
Zwei Bemerkungen zu $\subseteq$:

(i) Wenn A eine Menge ist und $a \in A$ (a also ein Element von A), dann gilt $\{a\} \subseteq A$. Es gilt allerdings niemals $a \subseteq A$ genau wie niemals $A \in A$ gilt. Die Leserin mache sich die Bedeutung der Relationszeichen an deren Definition und Beispielen klar.

(ii) Wie für $\leq$, haben wir natürliche auch $A \supseteq B$ und entsprechende Regeln gelten.

Als nächstes definieren wir Rechenoperationen mit Mengen. Dies sind für Mengen A und B

- der sogenannte **Durchschnitt**, die Antwort auf die Frage welche Elemente in A und B (zugleich) sind,
- die sogenannte **Vereinigung**, die Antwort auf die Frage welche Elemente in A oder B sind,
- die sogenannte **Differenz**, die Antwort auf die Frage welche Elemente in A aber nicht in B sind.

Dann gibt es noch das **Komplement** einer Menge welches die Menge aller Elemente (des Universums?) ist, die nicht in der Menge A sind.
Präziser:

Definition 1.2 (Rechenoperationen auf Mengen)**.**
Es seien A und B Mengen. Dann definieren wir

- *den **Durchschnitt** $A \cap B$ von A und B als die Menge*

$$A \cap B := \{x\colon\ x \in A \text{ und } x \in B\}$$

- *die **Vereinigung** $A \cup B$ von A und B als die Menge*

$$A \cup B := \{x\colon\ x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

und

- *die **Differenz** $A \backslash B$, also A ohne B, als die Menge*

$$A \backslash B = \{x\colon\ x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

*Das **Komplement** A^c der Menge A ist die Menge*

$$A^c := \{x\colon\ x \notin A\}.$$

Bemerkung 1.3.
Das Komplement könnte etwas irreführend sein. Wir nehmen nicht alle möglichen Elemente mit in diese Menge nur weil sie nicht in A sind. Es gibt üblicherweise einen guten Kandidaten in dem man das Komplement bildet. Beispiel: Was ist das Komplement von $[0,1]$. Nun, das ist die Menge der reellen Zahlen die größer als 1 sind oder kleiner als 0, d.h.

$$[0,1]^c = \mathbb{R} \setminus [0,1] = \{x \in \mathbb{R}\colon x < 0 \text{ und } x > 1\}.$$

Das Symbol $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ ist eher gebräuchlich als

$$\{x\colon\ x \in \mathbb{R} \text{ und } \quad x < 0 \text{ und } x > 1\}.$$

Es gelten folgende Rechenregeln deren Nachweis mit Hilfe der Definition der furchtlosen Leserin überlassen ist.

Satz 1.2 (Rechenregeln für Mengenoperationen)**.**
Es seien A, B und C Mengen, dann gelten

(i) Kommutativität:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

(ii) Assoziativität:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

(iii) Distributivität:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Übungsaufgabe 1.5.
Beweisen sie den Satz 1.2. Wie gesagt, seien Sie furchtlos. Der gesamte Beweis ist etwas länglich aber nicht schwer.

Weiter gilt für die Differenz

Satz 1.3 (Regeln für die Differenz)**.**
Es seien A, B und C. Dann gilt

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C),$$
$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C).$$

Übungsaufgabe 1.6.

Beweisen Sie auch Satz 1.2.

Als nächstes brauchen wir noch das Kreuzprodukt oder Kartesische Produkt von Mengen.

Definition 1.3 (Kreuzprodukt (Kartesisches Produkt))**.**
Seien A und B Mengen. wir definieren das ***Kreuzprodukt*** *(kartesische Produkt) $A \times B$ als die Menge aller* ***geordneten Paare***[a] (a, b) *mit $a \in A$ und $b \in B$:*

$$A \times B = \big\{(a, b)\colon\ a \in A \quad \textit{und} \quad b \in B\big\}.$$

Für n Mengen $A_1, \dots A_n$ schreiben wir

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n)\colon\ \textit{für alle } 1 \leq k \leq n \textit{ gilt } a_k \in A_k\}\,.$$

[a] 2-Tupel

Wir wollen hier nicht zu tief in die Grundlagen einsteigen. Darum werden wir die Tupel intuitiv behandeln. Zwei Tupel (a_1, b_1) und (a_1, b_2) sind genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.
Diese Definition erweitert sich natürlich entsprechend für n-Tupel.

1.4 Abbildungen (Funktionen)

Der Begriff der Funktion wird in der Schule immer sehr anschaulich gebildet aber im wesentlichen nie formal gefasst. Da wir Mathematik als Wissenschaft und nicht Freizeitvergnügen betrieben, wollen wir dies nachholen.

Definition 1.4 (Funktion)**.**
Seien A und B Mengen. Eine ***Funktion***

$$\begin{cases} f\colon A & \to & B \\ \quad a & \mapsto & f(a) \end{cases}$$

ist eine Vorschrift die jedem Element in A genau ein Element in B zuordnet. Die Menge A heißt ***Definitionsbereich*** *von f und die Menge B* ***Bildbereich****. Die Menge $f(A)$, definiert durch*

$$\begin{aligned} f(A) &= \{b \in B\colon \ \text{Es existiert } a \in A \text{ mit } f(a) = b.\} \\ &= \{f(a)\colon \ a \in A\} \end{aligned}$$

heißt ***Bild*** *(Wertebereich) der Funktion f.*
Die Menge $\operatorname{graph}(f)$, definiert durch

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x))\colon \ x \in A\},$$

heißt Graph von f.

Schreibweise: Wenn $f\colon A \to B$ eine Funktion ist, dann benutzen wir für eine Menge $C \subseteq A$ das Symbol

$$f(C) := \{f(c)\colon \ c \in C\}$$

für das Bild von C unter f. Weiterhin, wenn $D \subseteq B$, dann heißt

$$f^{-1}(D) := \{a \in A\colon \ f(a) \in D\}$$

das **Urbild** von D unter f. (Dabei ist das f^{-1} nicht unbedingt die Umkehrfunktion (siehe Definition 1.7), da diese nicht existieren muß. Das Symbol ist einfach ein suggestives Symbol für das Urbild.)

Bemerkung 1.4.
Wenn wir $f\colon A \to B$ schreiben, dann meinen wir immer, daß die Funktion auf dem ganzen Definitionsgebiet A definiert ist. Der Bildbereich muß nicht ausgeschöpft werden. Beispiel:

$$\begin{cases} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \qquad x & \mapsto & 1 \end{cases}$$

Bemerkung 1.5.
Zu einer Funktion gehört stets ihr Definitions– und Bildbereich. Insbesondere ohne Definitionsbereich sind viele Fragestellungen sinnlos.

Eine etwas technischere Definition, für die Interessierten, ist die folgende:

Definition 1.5 (Funktion)**.**
Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$ heißt Funktion falls

(i) für alle $a \in A$ existiert ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$

(ii) für $(a, b_1), (a, b_2) \in f$ stets folgt $b_1 = b_2$.

Dann schreiben wir für $(a, b) \in f$ das bekannte $f(a) = b$.

Eine wichtige Operation für Funktionen ist die sogenannte **Verkettung**.

Dazu

Definition 1.6 (Verkettung)**.**
Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Funktionen.
Dann ist die Funktion $g \circ f\colon A \to C$, definiert durch

$$a \mapsto g \circ f(a) := g(f(a)),$$

die ***Verkettung*** *(Komposition) von f und g.*
Man schreibt auch

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Beispiel 1.1.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Die Verkettung $g\circ\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ heißt ***Betragsfunktion****. Siehe auch Abschnitt 2.8. Wenn Sie Potenzen und Wurzeln noch nicht kennen, verstehen Sie das Beispiel nach dem Studium von Kapitel 2.*

Definition 1.7 (Umkehrfunktion)**.**
Es sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Wenn eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g \circ f(a) = a$ für alle $a \in A$ und $f \circ g(b) = b$ für alle $b \in B$ existiert, dann heißt g ***Umkehrfunktion*** *von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.*
Wenn für f eine Umkehrfunktion existiert, dann heißt f bijektiv, siehe Definition 1.8.

Beispiel 1.2.
Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *die Funktion* $f(x) = x^2$. *Dann ist* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ *die Umkehrfunktion von* f *da*

$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x = \sqrt{x^2} = g(f(x)).$$

Für $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *hat man keine Umkehrfunktion, da diese nicht bijektiv ist. Wie oben argumentiert muß man den Bildreich auf das Bild einschränken.*
Wenn Sie Potenzen und Wurzeln noch nicht kennen, verstehen Sie das Beispiel nach dem Studium von Kapitel 2.

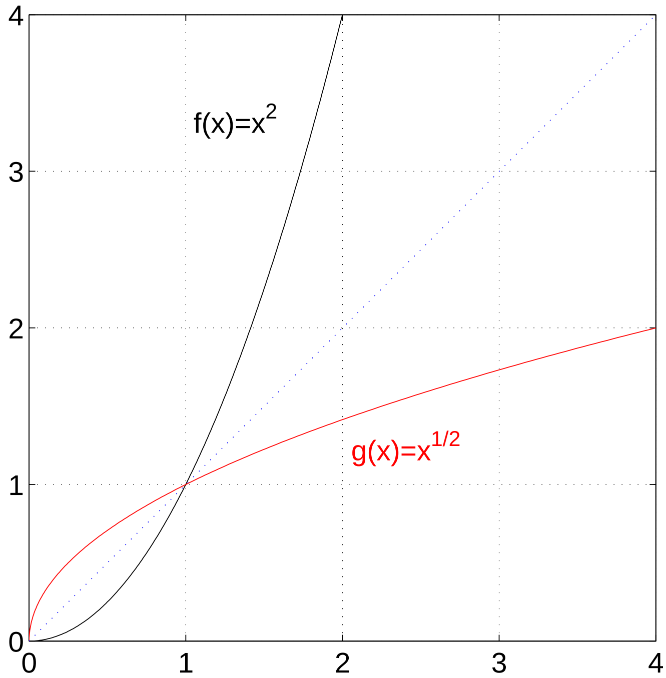


Abbildung 1.1: Wie bei allen reellen Funktionen entsteht der Graph der Umkehrfunktion durch Spiegeln des Graphen von f an der Geraden $y = x$. Wenn Sie Potenzen und Wurzeln noch nicht kennen, verstehen Sie das Beispiel nach dem Studium von Kapitel 2.

1.4.1 Surjektion, Injektion, Bijektion. Mengenäquivalenz

Von den oben gegebenen Definitionen (siehe insbes. Definition 1.5) für Funktionen kann man sich überlegen, welche Eigenschaften man braucht, um die Existenz einer Umkehrfunktion zu garantieren. Diese sind in der folgenden Definition zusammengefaßt.

Definition 1.8 (Surjektiv/injektiv/bijektiv)**.**
Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Dann heißt f genau dann

(i) ***injektiv****, wenn aus $f(a) = f(b)$ stets $a = b$ folgt.*
(Kontrapositiv: aus $a \neq b$ folgt $f(a) \neq f(b)$.)

(ii) ***surjektiv****, wenn für alle $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.*

(iii) ***bijektiv****, wenn f surjektiv und injektiv ist.*

Eine bijektive Funktion f hat eine ***Umkehrfunktion****, bezeichnet durch f^{-1}, siehe Definition 1.7.*

Wenn $f\colon A \to B$ eine Funktion ist und $a \in A$ und $b \in B$ beliebig, dann bedeutet

- die **Surjektivität** von f, daß die Gleichung $f(x) = b$ für jedes $b \in B$ lösbar ist.
- die **Injektivität** von f, daß eine Lösung $a \in A$ der Gleichung $f(a) = b$ (für $b \in B$) eindeutig ist (wenn sie überhaupt existiert). D.h. für alle $c \in A$ mit $f(c) = b$ gilt $c = a$.
  (Die Existenz der Lösung ist allerdings nicht garantiert.)

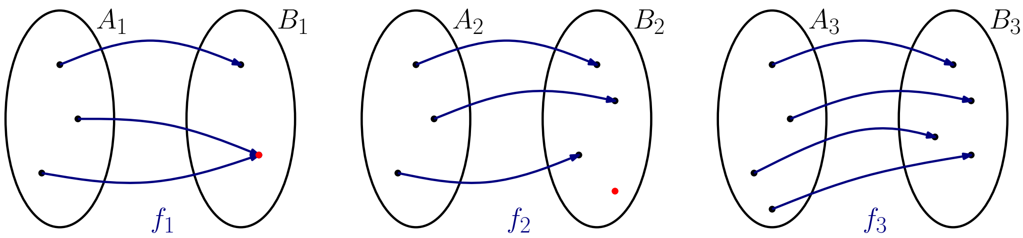


Abbildung 1.2: Die Funktion f_1 ist nicht bijektiv, da sie nicht injektiv ist. Die Funktion f_2 ist nicht bijektiv, da sie nicht surjektiv ist. Die Funktion f_3 ist surjektiv.

Wenn man Umformungen durchführt um eine Gleichung

$$f(a) = b$$

für eine Funktion $f\colon A \to B$ zu lösen, dann hat man darauf zu achten, daß man nur bijektive Funktionen auf beiden Seiten anwendet. Andernfalls führt man keine **Äquivalenzumformung** durch.
Aus der Schule erinnert sich die Leserin, daß man bei der Anwendung der Quadratfunktion beispielsweise darauf achten muß daß man nicht weitere Lösungen produziert hat.

Hilfssatz 1.2.
Wenn $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f\colon A \to C$ bijektiv und die Umkehrfunktion ist durch $f^{-1} \circ g^{-1}\colon C \to A$ gegeben.

Bemerkung 1.6.
Die Leserin möge beachten, daß die sich die Reihenfolge der Verkettung umkehrt: Wenn $g \circ f$ die Funktion ist, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} \circ g^{-1}$. Das sollte auch Intuitiv sein. Zeichnen Sie die Situation.

Mit dem Begriff der Bijektion führen wir jetzt noch den Begriff der Äquivalenz von zwei Mengen ein:

Definition 1.9 (Mengenäquivalenz)**.**
Seien A und B Mengen. Dann heißt A ***äquivalent*** *zu B, in Zeichen $A \sim B$, wenn eine bijektive Funktion $f\colon A \to B$ existiert.*

Der Begriff der Äquivalenz wird genutzt um zu definieren, wann zwei Mengen gleich groß sind. Beispielsweise sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ äquivalent (gleich groß), $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ jedoch nicht. Die erste Aussage überrascht natürlich viele, da ja auch zwischen zwei natürlichen Zahlen schon unendlich viele rationale Zahlen liegen. Es ist aber gar nicht schwer zu zeigen, daß eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dennoch existiert. Siehe beispielsweise hier.

Übungsaufgabe 1.7.
Zeigen Sie, daß die Mengen $\{1, \dots, n\}$ und $\{1, \dots, m\}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ genau dann äquivalent sind, wenn $m = n$ gilt.

Übungsaufgabe 1.8.

Zeigen Sie:

(i) *Es gilt* $A \sim A$. *(Reflexivität)*

(ii) *Es gilt* $A \sim B$ *genau dann, wenn* $B \sim A$. *(Symmetrie)*

(iii) *Wenn* $A \sim B$ *und* $B \sim C$, *dann gilt* $A \sim C$. *(Transitivität)*

1.4.2 Monotonie

Definition 1.10 (Monotonie von Funktionen)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon I \to \mathbb{R}$. Die Funktion ist

(i) ***monoton wachsend*** *(monoton nicht fallend) wenn für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.*

(ii) ***monoton fallend*** *(monoton nicht wachsend) wenn für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ folgt $f(x) \geq f(y)$.*

(iii) ***streng monoton wachsend*** *wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$.*

(iv) ***streng monoton fallend*** *wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ folgt $f(x) > f(y)$.*

Bemerkung 1.7.
Die Leserin überzeuge sich durch Beweis, daß für streng monoton wachsende Funktionen

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

und für streng monoton fallende Funktionen

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > f(y)$$

gilt. Durch die Angabe entsprechender Beispiele zeige sie weiterhin, daß dies nicht für nur monoton wachsende und fallende Funktionen gilt.

Satz 1.4 (Streng monotone Funktionen sind injektiv)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend/fallend.

(i) f ist injektiv.

(ii) $f\colon I \to f(I)$ is bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ist streng monoton wachsend/fallend.

Beweis. Wir zeigen die beiden Aussagen separat.

(i) Das f injektiv ist folgt unmittelbar, da andernfalls zwei verschiedene $x_1, x_2 \in I$ existieren müssten mit $f(x_1) = f(x_2)$.
(Wenn $x_1 \neq x_2$ dann gilt entweder $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$. Da wir die Elemente Umbenennen können reicht es $x_1 < x_2$ zu betrachten. Da f monoton ist, gilt auch $f(x_1) < f(x_2)$. Damit ist natürlich $f(x_1) \neq f(x_2)$.)

(ii) Auf seinem Bild ist f per Definition surjektiv und damit bijektiv. Sei also f^{-1} die Umkehrabbildung (die auch bijektiv ist). Seien zwei verschiedene $y_1, y_2 \in f(I)$ bel. gegeben. Sagen wir $y_1 < y_2$ (Trichotomie). Da f surjektiv ist existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ und da f injektiv ist sind diese eindeutig bestimmt. Da f streng monoton wachsend ist gilt $x_1 < x_2$ (siehe Bemerkung 1.7). Dann gilt

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2).$$

also ist f^{-1} streng monoton wachsend.

□

1.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Weisen Sie nach, daß die beiden aussagenlogischen Ausdrücke $(A \wedge \overline{C}) \Rightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \vee (\overline{C} \Rightarrow B)$ äquivalent sind.
2. Beweisen Sie oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel die Mengenbeziehung
$$(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B).$$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie die Äquivalenz der folgenden aussagenlogischen Ausdrücke $(A \vee (B \wedge \overline{C}))$ und $(\overline{B} \vee C) \Leftrightarrow A$ mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie die Äquivalenz der folgenden aussagenlogischen Ausdrücke

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ und } p \wedge (q \vee r)$$

mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle.

Aufgabe 4

Seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4\}$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:

$$1 \in A, \quad 5 \in A, \quad A \subseteq B, \quad \{2\} \in A, \quad \{2\} \subseteq A, \quad \emptyset \in A, \quad \emptyset \subseteq A.$$

Aufgabe 5

Man bilde zu folgenden reellen Funktionen die Umkehrfunktion und zeichne die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion jeweils in ein und dasselbe Diagramm.

(i) $f(x) = 1 + \log(x)$, (ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Wenn Sie mit der Logarithmusfunktion noch nicht vertraut sind, kehren Sie nach dem Studium von Kapitel 4 zu dieser Aufgabe zurück. Stellen Sie die Funktionen als Verkettungen möglichst einfacher Funktionen dar.

Aufgabe 6

Wie ändert sich der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ beim Übergang zu

(i) $x \mapsto f(kx)$, (ii) $x \mapsto kf(x)$, (iii) $x \mapsto f(x+k)$?

Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k > 0$ und $k < 0$.

Aufgabe 7

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade falls $f(x) = f(-x)$ und ungerade falls $f(-x) = -f(x)$ gilt. Sind die angegebenen reellen Funktionen gerade bzw. ungerade?

(i) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^{-x}$,

(ii) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^5 + 7x$,

(iii) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = x\sin(x)$,

(iv) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = x(e^x + e^{-x})$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, daß für gerade Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch alle Funktionen vom Typ $f + \lambda g$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder gerade sind. Was läßt sich damit über die Summe und Differenz von f und g sagen?

Aufgabe 9

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt genau dann periodisch, wenn ein $T > 0$ existiert mit $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; ein solches T heißt Periode von f. Das kleinste solche T heißt primitive Periode.
Sind die nachfolgenden Funktionen periodisch? Geben Sie, falls möglich, die primitive Periode an.

(i) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \cos(2 - \pi x)$,

(ii) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = -e^{\cos(4x)}$,

(iii) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \sin(x) + \cos(\pi x)$,

(iv) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = \log\left(2\sin^2(x+1)\right)$.

Kenntnisse zu den beteiligten Funktionen werden aus der Schule vorausgesetzt. Siehe andernfalls Kapitel 4.

Aufgabe 10

Es seien A, B und C Aussagen. Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel:

(i) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ (De Morgansche Regel),

(ii) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$,

(iii) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,

(iv) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P \wedge \overline{Q}}$.

Aufgabe 11

Vereinfachen Sie die folgenden aussagenlogischen Ausdrücke:

(i) $A \vee (A \wedge B)$,

(ii) $\overline{\overline{A} \wedge (A \vee B)}$,

(iii) $A \wedge (A \vee (A \wedge (A \vee B)))$.

2 Die reellen Zahlen

Wir haben in Beispielen im letzten Kapitel schon Schulwissen über die reellen Zahlen verwendet. In diesem Kapitel wollen wir die reellen Zahlen genau definieren und uns mit Eigenschaften beschäftigen.

Die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind eine Menge auf der zwei (binäre) Operationen $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(a,b)\mapsto a+b$ und $\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b$ existieren die eine Reihe von Axiomen erfüllen. Die Formeln $(a,b)\mapsto a+b$ und $(a,b)\mapsto a\cdot b$ bedeuten, daß die Operationen $+$ und $\cdot$ je zwei Elementen in $\mathbb{R}$ wieder ein Element in $\mathbb{R}$ zuordnen. Diese nennen wir respektive Summe und Produkt. Wir schreiben kurz ab für $a\cdot b$.

2.1 Das Axiomensystem der reellen Zahlen

Es gibt drei Gruppen von Axiomen, die die Elemente der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erfüllen müssen:

(I) Algebraische Axiome,

(II) Ordnungsaxiome, und

(III) das Vollständigkeitsaxiom.

Algebraische Axiome (I). Die beiden Operationen $+$ und $\cdot$ erfüllen die folgenden Regeln:

(I.1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (Assoziativität)

(I.2) $a+b=b+a$ (Kommutativität)

(I.3) Es gibt genau ein Element in $\mathbb{R}$, genannt Null und bezeichnet mit 0, so daß $a+0=a$ für alle $a\in\mathbb{R}$.

(I.4) Für $a\in\mathbb{R}$ existiert genau ein $b\in\mathbb{R}$ mit $a+b=0$. Das Element b wird mit $-a$ bezeichnet und a.

(I.5) $(ab)c = a(bc)$ (Assoziativität)

(I.6) $ab = ba$ (Kommutativität)

(I.7) Es gibt genau ein Element in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, genannt Eins und bezeichnet durch 1, so daß $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(I.8) Zu jedem $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert genau ein Element $b \in \mathbb{R}$ mit $ab = 1$. Wir bezeichnen b durch a^{-1} bzw. $\frac{1}{a}$. wir sagen, daß a^{-1} das Inverse von a ist.

(I.9) $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz)

Schreibregelung. Wir setzen die folgenden Bezeichnungen

$$a - b := a + (-b), \quad \frac{a}{b} := ab^{-1} = b^{-1}a.$$

Bemerkung 2.1.
Die Eindeutigkeit von 0, 1, $-a$ und a^{-1} folgt schon aus der Forderung der Existenz unter Benutzung der anderen Regeln. Beispiel: Seien 0 und $0'$ zwei neutrale Elemente der Addition. Dann gilt

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'.$$

Für 1 geht man ähnlich vor. (Übung!)

Bemerkung 2.2.
Eine Menge mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ wie oben beschrieben, die die Axiome (I.1) bis (I.9) erfüllen heißen Körper. Beispiele sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aber auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wenn Sie sich mit Schaltlogik beschäftigen, werden Sie den Körper $\mathbb{Z}_{(2)}$ kennenlernen. Die Multiplikations- und Additionstafeln von $\mathbb{Z}_2$ sind gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Damit können Sie überprüfen, ob die Axiome wirklich gelten.

Aus den Axiomen (I.1)–(I.9) lassen sich weitere Regeln ohne groß Mühe ableiten:

Abgeleitete Regeln: Diese Regeln haben Sie natürlich in der Schule gelernt aber wir wollen und hier nicht auf unsere Intuition allein verlassen sondern alles auf festen Grund stellen.

(I.10a) $-(-a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(I.10b) $(-a) + (-b) = -(a + b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,

(I.10c) $(a^{-1})^{-1} = a$ für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

(I.10d) $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

(I.10e) $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$,

(I.10f) $a(-b) = -(ab)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,

(I.10g) $(-a)(-b) = ab$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, und

(I.10h) $a(b - c) = ab - ac$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Eine weitere sehr wichtige abgeleitete Aussage ist:

(I.11) Wenn $ab = 0$ für zwei Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist mindestens eine der beiden Zahlen gleich Null.

Bemerkung 2.3.
Für den Moment ist $-a$ für das additiv Inverse (negative) von a nur eine Schreibweise. Das $-a = (-1) \cdot a$ gilt bedarf eines Beweises: Wir rechnen

$$(-1) \cdot a + a = ((-1) + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Folglich gilt $-a = (-1) \cdot a$, da $-a$ eindeutig bestimmt ist. Das $0 \cdot a = 0$ gilt sieht man wie folgt: sei $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Dann addieren wir $-a \cdot 0$ auf beide Seiten und erhalten die Aussage.

Zuletzt in dieser Reihe geben wir die üblichen Regeln des Bruchrechnens an:

(I.12a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(I.12b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und

(I.12c) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Übungsaufgabe 2.1.
Beweisen Sie die oben angegebenen abgeleiteten Regeln. Sie dürfen natürlich jeweils nur die schon bewiesenen Aussagen und die Axiome benutzen. Da der komplette Beweis etwas mehr Platz einnimmt, sollten Sie entsprechende Blätter einheften.

Die obigen Axiome (I.1)–(I.9) reichen nicht aus, um die reellen Zahlen auszuzeichnen und Sie wissen natürlich aus der Schule, daß es mehr Eigenschaften gibt. Beispielsweise gibt es eine Ordnung auf $\mathbb{R}$. Dazu nun die zweite Reihe an Axiomen.

Ordnungsaxiome (II). Für beliebige Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a = b$ oder $a \neq b$. Zwischen verschiedenen Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ besteht eine Anordnung, die mit dem Symbol $<$ bezeichnet wird und besagt, daß genau eine der beiden Relationen $a < b$ oder $b < a$ gilt.
Wir nennen dies das **Trichotomie Axiom**. Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, gilt genau eine der drei Relationen

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Die Ordnungsrelation erfüllt die folgenden Axiome für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Als erstes die Transitivität, die die Leserin auch aus der Schule kennt:

(II.1) Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$. (Transitivität)

Außerdem gibt es noch zwei Axiome die festlegen, wie $<$ mit $+$ und $\cdot$ interagiert:

(II.2) Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(II.2) Wenn $a < b$ und $c > 0$, dann $ac < bc$.

Notation und Terminologie. Wir setzen die Bezeichnung $a \leq b$ für den Fall, daß (entweder) $a < b$ oder $a = b$ gilt und lesen a **kleiner als oder gleich** b. Eine äquivalente Schreibweise für $a < b$ ist $b > a$ und wir setzen wie zuvor $a \geq b$ wenn entweder $a > b$ oder $a = b$ gilt.
Wie üblich, nennen wir $a \in \mathbb{R}$ **positiv** falls $a > 0$ und **negativ** wenn $a < 0$ und **nichtnegativ** wenn $a \geq 0$ und **nichtpositiv** wenn $a \leq 0$.
Aus den Axiomen (II.1–II.3) können wir, zusammen mit den Axiomen (I.1)–(I.9) und den Regeln (I.10a)–(I.12c) weitere Regeln für das Rechnen mit $<$ ableiten:

Abgeleitete Regeln. Für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gelten, unter den angegebenen Bedingungen, die folgenden Aussagen:

(II.4) $a < b \;\Leftrightarrow\; b - a > 0$,

(II.5) $a < 0 \;\Leftrightarrow\; -a > 0$ und $a > 0 \;\Leftrightarrow\; -a < 0$,

(II.6) $a < b \;\Leftrightarrow\; -b < -a$,

(II.7) Wenn $a < b$ und $x < y$, dann $a + x < b + y$,

(II.8) $ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0,\, b > 0$ oder $a < 0, b < 0$,
$ab < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0,\, b < 0$ oder $a < 0, b > 0$,

(II.9) $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$ (insbesondere $1 > 0$),

(II.10) Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$.

(II.11) $a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > 0$,

(II.12) Aus $a^2 < b^2$, $a \geq 0$, und $b > 0$ folgt $a < b$.

Diese Axiome reichen noch immer nicht um die reellen Zahlen von den rationalen abzusetzen. Wie Ihnen bekannt ist, gelten die Ordnungsaxiome natürlich auch für die rationalen Zahlen. Mit Bemerkung 2.2 nennt man Mengen mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ die die Axiomgruppen I und II erfüllen angeordnete Körper.

Das letzte Axiom in dieser Reihe ist das sogenannte Vollständigkeitsaxiom und dieses wird von $\mathbb{Q}$ beispielsweise nicht erfüllt. Wie der Name suggeriert, bedeutet das Axiom, daß die reellen Zahlen in gewisser Weise keine Löcher haben. Jede Menge mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ die die Axiomgruppen I, II und III erfüllen sind gleichwertig[1] zu den reellen Zahlen. Es gibt zwar verschiedene Wege diese zu konstruieren (siehe beispielsweise Wikipedia Konstruktion der reellen Zahlen) aber die sind alle in dem Sinne gleich, daß alle oben genannten Regeln gelten. Da die verschiedenen Konstruktionen also in diesem Sinne nicht unterscheidbar sind, ist es gerechtfertigt von **den** reellen Zahlen zu sprechen.

[1]Man sagt, daß alle Strukturen mit den Axiomgruppen I, II und III isomorph sind.

Um das Vollständigkeitsaxiom einführen zu können, brauchen wir noch ein paar weitere Definitionen. Als erstes die Begriffe obere und untere Schranke.

Definition 2.1 ((Obere/Untere)Schranke)**.**
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ heißt genau dann

1. ***nach oben beschränkt**, wenn ein $U \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \leq U$ für alle $x \in M$; U heißt dann **obere Schranke** von M.*
2. ***nach unten beschränkt**, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ existiert mit $L \leq x$ für alle $x \in M$; L heißt dann **untere Schranke** von M.*
3. ***beschränkt**, wenn M eine obere und eine untere Schranke besitzt.*

Mit diesen Begriffen brauchen wir noch die des Supremums und Infimums einer Menge. Diese sind die kleinste obere und größte untere Schranke einer Menge.

Definition 2.2 (Supremum/Infimum)**.**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

1. *Eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ heißt genau dann das **Supremum** von M, falls S eine obere Schranke für M ist und für eine beliebige obere Schranke U von M gilt $S \leq U$.*
2. *Eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ heißt genau dann das **Infimum** von M, falls I eine untere Schranke für M ist und für eine beliebige untere Schranke L von M gilt $L \leq I$.*

Supremum und Infimum von M werden je mit $\sup(M)$ und $\inf(M)$ bezeichnet.

Schreibregelung. Wenn eine Menge nach oben/unten beschränkt ist, schreiben wir sup$(M) < \infty$/inf$(M) > -\infty$. Wenn eine Menge nicht nach oben/unten unbeschränkt ist, dann schreiben wir sup$(M) = \infty$ bzw. inf$(M) = -\infty$.

Vollständigkeitsaxiom (III). Die von uns verwendete Form des Axioms lautet:

> Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Das Vollständigkeitsaxiom ist äquivalent zur Fassung für nach unten beschränkte Mengen: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Es gelten die folgenden nützlichen Aussagen:

Satz 2.1.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

(i) Wenn sup$(M) < \infty$, *dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit* sup$(M) - \varepsilon < x$.

(ii) Wenn sup$(M) = \infty$, *so gibt es zu jedem $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ ein $x \in M$ mit $C < x$.*

(iii) Wenn inf$(M) > -\infty$, *dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit $x <$* inf$(M) + \varepsilon$.

(iv) Falls inf$(M) = -\infty$, *dann gibt es zu jedem $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ ein $x \in M$ mit $x < -C$.*

Bemerkung 2.4.
Die Leserin beachtet bitte, daß das Supremum bzw. das Infimum einer Menge nicht Element der Menge sein muß. Lesen Sie die Definition genau. Das ist auch der Grund, warum dieser Begriff zusätzlich zu intuitiven Begriffen wie Maximum/Minimum eingeführt wird. Siehe die nächste Definition.

Abschließend geben wir

Definition 2.3 (Maximum/Minimum)**.**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

(i) Ein Element $m \in M$ heißt ***Maximum von*** *M falls $x \leq m$ für alle $x \in M$.*

(ii) Ein Element $m \in M$ heißt ***Minimum von*** *M wenn $m \leq x$ für alle $x \in M$.*

Wir bezeichnen Maximum und Minimum von M jeweils mit $\max(M)$ *und* $\min(M)$.

Bemerkung 2.5.
Die Leserin beachte bitte, daß beschränkte Mengen kein Minimum oder Maximum haben müssen. Beispielsweise hat die Menge

$$M := (0,1) := \{x \in \mathbb{R} \colon \; 0 < x < 1\}$$

sowohl Supremum $\sup(M) = 1$ *als Infimum* $\inf(M) = 0$ *aber kein Minimum oder Maximum!*

Bemerkung 2.6.
Wenn $\inf(m) \in M$ *oder* $\sup(M) \in M$*, dann ist* $\max(M) = \sup(M)$ *und* $\min(m) = \inf(M)$.

2.2 Schematische Zusammenfassung der Axiome

<table>
<tr><td colspan="2">Körperaxiome: Es gibt zwei Operationen (Addition, Multiplikation) die folgendes erfüllen:</td><td rowspan="3">Körperaxiome</td><td rowspan="6">Axiome angeordneter Körper</td><td rowspan="7">Axiome ordnungsvollständiger Körper</td></tr>
<tr><td>Axiome Addition
Assoziativgesetz
Kommutativgesetz
Existenz der Null
Existenz des Negative</td><td>Axiome Multiplikation
Assoziativgesetz
Kommutativgesetz
Existenz der Eins ($\neq 0$)
Existenz des Reziproken ($\neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Distributivgesetz</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ordnungsaxiome: Es gibt sogenannte positive Elemente ($x > 0$), so daßfolgende Regeln gelten:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Trichotomie: Für alle x und y in $\mathbb{R}$ gilt genau eine von
$x < y, \quad x = y, \quad y < x$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$x < y$ and $y < z \Rightarrow x < z$
$x < y \quad \Rightarrow \quad x + z < y + z$ for all $z \in \mathbb{R}$
$x < y$ and $z > 0 \Rightarrow xz < yz$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Vollständigkeitsaxiom:
Jede beschränkte $A \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum.</td></tr>
</table>

Tabelle 2.1: Schematische Zusammenfassung der oben eingeführten Axiome von $\mathbb{R}$.

Übungsaufgabe 2.2.
Betrachten Sie

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \left\{a + b\sqrt{3}\colon\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Wir definieren die Operationen

$$(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) = a + b + (a' + b')\sqrt{3}$$

und

$$(a + b\sqrt{3}) \cdot (a' + b'\sqrt{3}) = (aa' + 3bb') + (ab' + a'b)\sqrt{3}.$$

Rechnen Sie nach, daß $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ *die Körperaxiome erfüllt.*

2.3 Natürliche Zahlen & vollständige Induktion

Wir führen nun in Windeseile die natürlichen Zahlen ein. Die finden wir in den reellen Zahlen wie folgt: Die natürlichen Zahlen sind die kleinste Menge[2] $M \subseteq \mathbb{R}$ für die gilt:

(Ni) $1 \in M$

(Nii) Wenn $x \in M$, dann $x + 1 \in M$.

Diese Menge bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$.

Bemerkung 2.7.
Eine Menge mit den Eigenschaften (Ni) und (Nii) heißt induktiv. Das es induktive Mengen gibt ist klar. Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ *selbst eine induktive Menge oder das Intervall* $[-17, \infty)$ *und so weiter. Die kleinste solche Menge ist der Durchschnitt aller Induktiver Mengen.*
Das der Durchschnitt induktiver Mengen eine induktive Menge ist sieht die Leserin leicht ein. Damit existiert die Menge $\mathbb{N}$.
Man kann auch zeigen, daß jede andere minimale induktive Menge bijektiv auf $\mathbb{N}$ *abgebildet werden kann. Damit ist* $\mathbb{N}$ *im wesentlichen auch eindeutig bestimmt.*

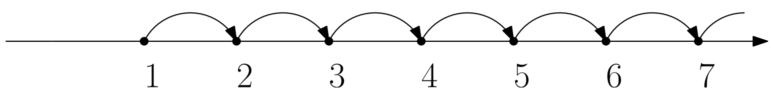


Abbildung 2.1: Die Menge $\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge in $\mathbb{R}$ die 1 und mit n auch $n + 1$ enthält.

[2] d.h. wir nehmen den Durchschnitt über alle $M \subseteq \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften.

Diese Eigenschaft der natürlichen Zahlen wird auch das **Induktionsprinzip** genannt. Damit ergibt sich folgendes wichtiges Beweisprinzip:

Satz 2.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.**
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage B_n gegeben für die gelte:

(i) B_1 ist wahr.

(ii) Aus der Annahme, daß B_n für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, folgt, daß B_{n+1} wahr ist.

Dann gilt B_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ die Menge definiert durch

$$M = \{n \in \mathbb{N} \colon \; B_n \text{ ist richtig}\}.$$

Nach den Annahmen (i) und (ii) hat die Menge die Eigenschaften (Ni) und (Nii) der Natürlichen Zahlen. Da $M \subseteq \mathbb{N}$ nach Definition gilt, folgt nun $M = \mathbb{N}$ da $\mathbb{N}$ minimal ist. □

Bevor wir weitere Eigenschaften bringen, betrachten wir ein Standardbeispiel für das Prinzip der vollständigen Induktion:

Beispiel 2.1.
Wir wollen zeigen, daß die Summe der ersten n natürlichen Zahlen genau $\frac{n(n+1)}{2}$ ist. Die Behauptung B_n ist

$$B_n\colon \quad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Induktionsanfang, also B_1, ist klar.

Die Induktionsannahme ist, daß B_n für ein $n = k$ gilt, also

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

richtig ist. Dann folgt der Induktionsschritt wie folgt:

$$\begin{aligned}\underbrace{1 + 2 + ... + k}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + (k+1) &= (1 + ... + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2},\end{aligned}$$

was die Aussage B_{k+1} ist. Damit ist auch (ii) in Satz 2.2 erfüllt und B_n gilt damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 2.3.
Beweisen Sie, mittels vollständiger Induktion, die Formel

$$1 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Die nachfolgend aufgelisteten Eigenschaften der natürlichen Zahlen kennen sie natürlich, aber wir wollen hier, wie schon gesagt, alles auf soliden Grund stellen und wollen uns zumindest stets vergegenwärtigen, was wir beweisen müßten. Der Beweis erfolgt durch Induktion.

Satz 2.3 (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)**.**
Es gilt:

(i) $n \geq 1$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $n + m \in \mathbb{N}$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) $nm \in \mathbb{N}$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}$.

(iv) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt entweder* $n = 1$ *oder* $n - 1 \in \mathbb{N}$.

(v) $n - m \in \mathbb{N}$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m$.

Es ergibt aus dem letzten Satz

Folgerung 2.1.
Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 1$. Für kein $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m < n < m + 1$ oder mit $m - 1 < n < m$.

Wir setzen nun

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{N}^- := \{-n \colon\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{Z} := \mathbb{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Die Menge $\mathbb{Z}$ wird die Menge der **ganzen Zahlen** genannt.

Der nächste Satz beweist eine aus der Schule wohlbekannte Eigenschaft der natürlichen Zahlen in den reellen.

Satz 2.4 (Satz von Archimedes)**.**
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $a < n$ gilt.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Widerspruch. Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die (nichtleere) Menge $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt und hätte, nach Axiom (III), ein Supremum $b := \sup(\mathbb{N})$. Da $b < b + 1$, folgt $b - 1 < b$ und damit ist $b - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Folglich gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b + 1 < n$. Damit gilt aber auch $b < n + 1$ und $n + 1 \in \mathbb{N}$.
Dies ist ein Widerspruch, da b als Supremum von $\mathbb{N}$ per Definition eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. $\square$

Aus dem Satz von Archimedes folgt ohne Umschweife

Folgerung 2.2.
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $-n < a$ gilt.

Wir benötigen noch den folgenden

Satz 2.5.
Jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$ hat ein minimales/kleinstes Element.

Beweis. Nach (i) in Satz 2.3 ist $\text{inf}(\mathbb{N}) = 1$. Darum gilt auch $a := \text{inf}(M) > -\infty$. Was zu zeigen bleibt, siehe Definition 2.3 ist $a \in M$.
Angenommen, $a \notin M$.
Dann gilt $a < m$ für alle $m \in M$. Nach Satz 2.1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in M$ mit $m < a + \varepsilon$.
Wählen wir $\varepsilon := 1$, so gibt es ein $m \in M$ mit $a < m < a + 1$. Mit $\varepsilon := m - a > 0$ gibt es ein $m' \in M$ mit $a < m' < a + \varepsilon = m$.
Damit gilt $a < m' < m < a+1$ und folglich $0 < m' - m < 1$. Da $m' - m \in \mathbb{N}$ (siehe Satz 2.3) steht die letzte Aussage im Widerspruch zu Folgerung 2.1. $\square$

Aus Satz 2.4 und Folgerung 2.2 folgt, daß für jedes $a \in \mathbb{R}$ Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ existieren mit $-m < a < n$. Mit Satz 2.5 erhalten wir

Satz 2.6 (Floor und ceil)**.**
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existieren die Zahlen

$$\lfloor a \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : \; n \leq a\},$$
$$\lceil a \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : \; a \leq n\}.$$

Statt $\lfloor a \rfloor$ wird oft auch $[a]$ (Gaußklammer) benutzt.

Zuletzt definieren wir die Begriffe **endliche Menge**, **Anzahl der Elemente** und **unendliche Menge**.

Definition 2.4 (Endliche/unendliche Menge)**.**
Eine Menge M heißt genau dann

(i) ***endlich****, wenn sie entweder leer ist oder zu einer der Mengen $A_n := \{k \in \mathbb{N}\colon\ k \leq n\}$ äquivalent ist. Symbol: $M \sim A_n$.*

(ii) ***unendlich****, wenn sie nicht endlich ist.*

Wenn M endlich ist und $M \sim A_n$ gilt, dann heißt n die ***Anzahl*** *der Elemente von M. Symbol: $\#M = n$.*

Bemerkung 2.8.
Die Anzahl von Elementen einer Menge ist eindeutig bestimmt. Um dies zu sehen ist (per Induktion) zu zeigen, daß $A_n \sim A_m$ genau dann, wenn $m = n$ und $A_n \nsim A_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Siehe Übungsaufgabe 1.7.

Durch Induktion zeigt man

Satz 2.7.
*Die Anzahl der möglichen Anordnungen/****Permutationen*** *(bijektiven Funktionen) $f\colon A_n \to M$[a] einer Menge M mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen ist $n! := n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.*

[a] $A_n := \{k \in \mathbb{N}\colon\ k \leq n\}$

Sprechweise. Die Zahl $n!$ wird als n-Fakultät gesprochen und ist nach dem letzten Satz induktiv definiert durch

$$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1)!.$$

Übungsaufgabe 2.4.

Zeigen Sie Satz 2.7. Ist auch nicht unbedingt nötig, es durch Induktion zu tun. Was fällt Ihnen noch ein?

2.4 Endliche Summen und Produkte

Es seien $n \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben. Die Summe s_n und das Produkt p_n sind dann induktiv definiert:

$$s_1 := a_1, \quad s_n := s_{n-1} + a_n,\ n \geq 2$$

und

$$p_1 := a_1, \quad p_n := p_{n-1} \cdot a_n,\ n \geq 2.$$

Für s_n und p_n schreiben wir auch

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Indizes müssen natürlich nicht mit $k = 0$ beginnen. Wir schreiben auch

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n,$$

und

$$\prod_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} \cdot a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

mit der Vereinbarung

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = 0,\ \text{für } n < n_0, \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^{n} a_k = 1,\ \text{für } n < n_0.$$

Weiterhin haben wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l}, \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l}.$$

Mittels Induktion weist man die folgenden Rechenregeln unter Verwendung der entsprechenden Regeln für die Summe und das Produkt reeller Zahlen nach, siehe Sektion 2.1:

Satz 2.8 (Rechenregeln Summen)**.**
Für reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, $c \in \mathbb{R}$. *(Distributivgesetz)*

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n'-1} a_k + \sum_{k=n'}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $1 < n' < n$. *(Assoziativgesetz)*

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$, *(Kommutativgesetz)*

wobei $\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ *eine beliebige bijektive Funktion (eine sogenannte Permutation) ist.*

Entsprechendes gilt für Produkte.

Satz 2.9 (Rechenregeln Produkte)**.**
Für reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} ca_k = c\prod_{k=1}^{n} a_k$, $c \in \mathbb{R}$. *(Distributivgesetz)*

(ii) $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n'-1} a_k\right)\left(\prod_{k=n'}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} a_k$, $1 < n' < n$. *(Assoziativgesetz)*

(iii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$, *(Kommutativgesetz)*

wobei $\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ *eine beliebige bijektive Funktion (eine sogenannte Permutation) ist.*

Übungsaufgabe 2.5.
Weisen Sie die obigen Eigenschaften, wenigstens für die Summen nach. Überlegen Sie sich, wie Sie die Aussagen auf die Aussagen in Abschnitt 2.1 zurückführen.

Definition 2.5 (n-te Potenz)**.**
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-te Potenz a^n einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ durch

$$a^0 := 1, \quad a^n := a \cdot a^{n-1} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\mathit{mal}}.$$

Wir setzen für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a^{-n} := (a^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mittels Induktion beweist man

Satz 2.10.
Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

(i) $a^{m+n} = a^m a^n$,

(ii) $a^{nm} = (a^n)^m = (a^m)^n$.

2.5 Die Bernoullische Ungleichung

Satz 2.11 (Bernoullische Ungleichung)**.**
Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > -1$ gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage klar richtig.
Wir nehmen nun an, daß die Ungleichung für $n = k$ gilt. Da nun $1 + a > 0$ und $ka^2 \geq 0$ gelten, folgt

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\
&\geq (1+a)(1+ka) \\
&= 1 + ka + a + ka^2 \\
&\geq 1 + (k+1)a.
\end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für $n = k + 1$ und wir haben die Ungleichung bewiesen. □

Es gilt schärfer

Satz 2.12 (Bernoullische Ungleichung)**.**
Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > -1$ und $a \neq 0$, gilt

$$(1+a)^n > 1 + na.$$

Übungsaufgabe 2.6.
Verschaffen Sie sich ein Prinzip der vollständigen Induktion wobei die Aussagen B_n jetzt für $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu beweisen sind. Beweisen Sie ein solches Prinzip durch Anwendung von Satz 2.2 auf Behauptungen B_{n-n_0+1}. Benutzen Sie dann dieses Prinzip um Satz 2.12 zu beweisen.

2.6 Wurzeln

Die Gleichung $x^2 - c = 0$, $c \in \mathbb{Q}$ kann im allgemeinen nicht in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gelöst werden, dies ist einer der Gründe für die Erweiterung (Vervollständigung) der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen.

Übungsaufgabe 2.7.
Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, daß die Zahl $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl sein kann.

Wir zeigen nun, daß die Gleichung $x^2 - c = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ in den reellen Zahlen gelöst werden kann.

Satz 2.13 (Quadratwurzel)**.**
Für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, so daß $x^2 = c$ ist.

Beweis. Wir beweisen die Eindeutigkeit und Existenz getrennt. Den Beweis der Existenz skizzieren wir nur.

(i) **Eindeutigkeit von** x: Angenommen, es gibt $x_1, x_2 \geq 0$ mit $x_1^2 = c$ und $x_2^2 = c$. Dann gilt

$$0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Folglich muß mindestens einer der Faktoren verschwinden. Wenn $x_1 - x_2 = 0$, dann gilt $x_1 = x_2$ und wenn $x_1 + x_2 = 0$, dann gilt $x_1 = x_2 = 0$ da $x_1, x_2 \geq 0$.

(ii) **Existenz (Skizze)**: Wir definieren

$$M := \left\{z \in \mathbb{R}\colon\ z \geq 0,\ z^2 \leq c\right\}.$$

Da $0 \in M$, ist $M \neq \emptyset$. Weiterhin ist M beschränkt: Da $(1+c)^2 \geq 1+c$ ist folgt nach Definition der Menge M, daß $z^2 \leq (1+c)^2$ für alle $z \in M$. Damit ist $z \leq c+1$ für alle $z \in M$. Nach Axiom (III) (Vollständigkeit) existiert nun ein Supremum $x := \sup(M)$ von M. Was zu zeigen bleibt ist $x^2 = c$. Dazu weist man nach, daß weder $x^2 < c$ noch $x^2 > c$ gelten kann. Damit gilt dann $x^2 = c$ nach der Trichotomie; siehe Seite 34.

□

Ähnlich, insbesondere mit der Formel

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$$

zeigt man auch

Satz 2.14 (n-te Wurzeln)**.**
Für $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, so daß $x^n = c$ ist.

Sprachregelung. Wir bezeichnen die Lösung aus Satz 2.13 als **die** Quadratwurzel von c und schreiben $x = \sqrt{c}$. Wie Sie wissen, ist diese Zahl nicht die einzige Lösung von $x^2 = c$ in $\mathbb{R}$; mit x ist auch $-x$ eine Lösung. Daher bezeichnen wir $-x$ auch als **eine** Quadratwurzel von c.
Die Lösungen der Gleichung $x^n = c$ aus Satz 2.14 (also die positiven Wurzeln) nennen wir **die** n-te Wurzel von c und wir schreiben

$$x := \sqrt[n]{c} := x^{\frac{1}{n}}.$$

Wenn wir in Kapitel 10 die komplexen Zahlen behandeln, werden wir die Wurzelfunktion näher untersuchen und dann auch Wurzeln negativer Zahlen erklären.

Wir halten noch zwei wichtige Eigenschaften der Quadratwurzeln fest.

Satz 2.15.
Es gelten die Folgenden Aussagen:

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b \geq 0$ gilt $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. (Monotonie)

Beweis. Zum Beweis brauchen wir nur die Eigenschaften von Quadratwurzeln und die Rechengesetze der reellen Zahlen.

(i) Da $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$, ist auch $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 &= \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right) \\ &= (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{ab}$ in $\mathbb{R} \cap \{x \geq 0\}$ eindeutig bestimmt ist, ergibt sich $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

(ii) Aus $(II.12)$ folgt mit $\sqrt{a} > 0$, $\sqrt{b} \geq 0$ und

$$(\sqrt{a})^2 = a > b = (\sqrt{b})^2$$

die Beziehung $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

□

Übungsaufgabe 2.8.
Entsprechende Aussagen wie im letzten Satz gelten für die n-ten Wurzeln. Formulieren und beweisen (Induktion) Sie die entsprechenden Regeln.

Schreibregelung. Allgemeiner setzen wir für $x \geq 0$ und $p, q \in \mathbb{N}$:

$$x^0 := 1, \quad x^{\frac{p}{q}} := (x^{\frac{1}{q}})^p = (x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Mittels Induktion kann man zeigen:

Satz 2.16.
Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \geq 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten

(i) $x^{r+s} = x^r x^s$,

(ii) $x^{rs} = (x^r)^s = (x^s)^r$,

(iii) $x^r y^r = (xy)^r$.

Den Fall x^α $(x > 0)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ werden wir später behandeln, wenn wir die Logarithmusfunktion zur Verfügung haben.

2.7 Binomischer Satz

Definition 2.6 (Binomialkoeffizienten)**.**
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die ***Binomialkoeffizienten*** $\binom{\alpha}{k}$ *durch*

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}, \; k \geq 1.$$

Mit der Bezeichnung $\alpha^{\underline{k}} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$, $\alpha^{\underline{0}} := 1$ und $n!$, definiert durch $n! = n\cdot(n-1)!$, $0! = 1$, können wir schreiben

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}.$$

Mit der obigen Definition gilt für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Satz 2.17 (Additionstheorem)**.**
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Übungsaufgabe 2.9.
Beweisen Sie das Additionstheorem für Binomialkoeffizienten.

Satz 2.18 (Binomischer Lehrsatz)**.**
Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.
\end{aligned}
$$

Übungsaufgabe 2.10.
Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz mittels vollständiger Induktion.

Bemerkung 2.9.
Mit dem binomischen Lehrsatz erhält man Satz 2.12 unmittelbar für $x \geq 0$ ohne Induktionsargument. (Wie?)

2.8 Absolutbetrag & Abstandsfunktion

Definition 2.7 (Absolutbetrag)**.**
Die Funktion $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto |a|$, *definiert durch*

$$|a| := \begin{cases} a & : \quad a > 0 \\ 0 & : \quad a = 0 \\ -a & : \quad a < 0 \end{cases}$$

*wird (Absolut)**Betrag** von a genannt.*

Als erstes fassen wir ein paar unmittelbare und wichtige Eigenschaften von $|\cdot|$ zusammen.

Satz 2.19.
Der Absolutbetrag $|\cdot|$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| \geq 0$ und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

(ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $|\lambda a| = |\lambda||a|$.

(iii) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Dreiecksungleichung)

Beweis. Aus der Definition des Betrages folgt unmittelbar $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $|x|^2 = x^2$ und $|-x| = |x|$.

(i) Folgt auch unmittelbar aus der Definition.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} |\lambda a|^2 &= (\lambda a)^2 \\ &= \lambda^2 a^2 \\ &= |\lambda|^2 |a|^2. \end{aligned}$$

Damit $|\lambda a| = |\lambda||a|$. (Oder durch Fallunterscheidung.)

(iii) Wir haben $a \leq |a|$ und $b \leq |b|$. Durch Addition der Ungleichungen (siehe (II.7)) folgt $a + b \leq |a| + |b|$. Da wir auch $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b|$ haben, gilt (wieder II.7) auch $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Damit folgt dann $|a + b| \leq |a| + |b|$ nach Definition des Betrages.

□

Bemerkung 2.10.
Ein weiteres Argument für den Punkt (iii) im letzten Satz ist: Wir haben

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2, \end{aligned}$$

wobei wir auch $ab \leq |ab| = |a||b|$ benutzt haben.

Die Dreiecksungleichung gehört zweifelsohne zu den wichtigsten Hilfsmitteln der Analysis. Eine weitere wichtige Ungleichung, derer wir uns oft bedienen werden, ist

Satz 2.20 (Dreiecksungleichung (nach unten))**.**
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big| \tag{2.8.1}$$

Aus (2.8.1) folgt auch

$$|a - b| \geq |a| - |b| \quad \text{und} \quad |a - b| \geq |b| - |a|.$$

Siehe dazu auch den Beweis.

Beweis. Es gilt

$$|a| = |a + b - b| \leq |a + b| + |b| \quad \text{also} \quad |a| - |b| \leq |a + b|.$$

Ein gleiches Argument mit vertauschten Rollen von a und b liefert $-(|a|-|b|) \leq |a + b|$. Damit haben wir $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$. $\square$

Mit dem Betrag können wir auf den reellen Zahlen einen Abstandsbegriff einführen.

Definition 2.8 (Abstand)**.**
Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir $|a - b|$ als den ***Abstand*** *von a und b.*

Der nachfolgende Satz faßt anschauliche Eigenschaften des Abstandes zusammen.

Satz 2.21.
Für den Abstand gelten die folgenden Aussagen: für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

(i) $|a - b| \geq 0$, $|a - b| = 0$ *genau dann wenn* $a = b$.

(ii) $|a - b| = |b - a|$.

(iii) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$. *(Dreiecksungleichung)*

Übungsaufgabe 2.11.
Veranschaulichen Sie sich Satz 2.21.

Übungsaufgabe 2.12.

Beweisen Sie Satz 2.21.

2.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 12

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit und geben Sie ggf. inf(M), sup(M) bzw. min(M), max(M) an:

$$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x + 6 \geq 0\right\}, \qquad M_2 = \left\{3 - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aufgabe 13

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Aufgabe 14

Untersuchen Sie die folgenden Mengen M auf Beschränktheit und geben Sie ggf. $\inf M$, $\sup M$ bzw. $\min M$, $\max M$ an:

$$M_1 = \left\{\frac{1}{(n+1)^2} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad M_2 = \left\{e^x : x \in \left[0, \ln\frac{5}{2}\right)\right\}.$$

Aufgabe 15

Untersuchen Sie die folgenden Mengen M_i auf Beschränktheit und geben Sie ggf. $\inf M_i$, $\sup M_i$ bzw. $\min M_i$, $\max M_i$ an:

$$M_1 = \left\{\frac{1}{(n+1)^2} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad M_2 = \left\{e^x : x \in \left[0, \ln\frac{15}{2}\right)\right\}.$$

Aufgabe 16

Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der Ungleichung

$$\left|\frac{4x+3}{x+6}\right| > 1.$$

Aufgabe 17

Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der Ungleichung

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 2.$$

Aufgabe 18

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden reellen Funktionen und geben Sie jeweils das Bild an. Sind die angegebenen Funktionen beschränkt?

(i) $f(x) = \frac{a}{x},\ a \neq 0$,

(ii) $f(x) = \frac{1}{x^2-6x+10}$,

(iii) $f(x) = \text{arctan}\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2}\right),\ x > 0$.

Aufgabe 19

Zeigen Sie für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Aufgabe 20

Zeigen Sie, daß zwischen je zwei rationalen Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ stets eine irrationale zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ liegt, d.h. $r_1 < x < r_2$.

Aufgabe 21

Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$, $q, a, b \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + ... + q^n)$$
$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + ab^{n-1} + b^n)$$

gelten.

Aufgabe 22

Auf n Orchester sollen m Musiker so verteilt werden, daß im i-ten Orchester genau m_i Musiker sitzen , also

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = m.$$

Zeigen Sie, daß es genau

$$\frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_n!}$$

Verteilungen gibt.

3 Zahlenfolgen

3.1 Einführende Überlegungen

Zur Lösung praktischer Fragen muß man oft die Nullstellen einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ bestimmen, also Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ für $x \in I$ finden. Wenn die Funktion hinreichend einfach, beispielsweise ein Polynom zweiten Grades, ist, dann ist das für die Leserin natürlich kein Problem. Für viele Funktionen f wird eine Lösung von $f(x) = 0$ jedoch nur numerisch, also approximativ, möglich sein. Da gibt es viele mögliche Verfahren und darunter auch iterative; dies sind Verfahren die eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen liefern, die mit größerem n die echte Lösung geeignet approximieren.

Beispiel: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (stetige) Funktion und wir wollen die Nullstellen berechnen. Wir nehmen an, daß wir ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kennen mit $f(a) < 0 < f(b)$. Jetzt halbieren wir das Intervall $x_1 = \frac{b-a}{2}$ und berechnen $f(x_1)$. Falls $f(x_1) = 0$ ist sind wir fertig. Wenn $f(x_1) < 0$, dann nehmen wir als nächstes das Intervall $[x_1, b]$ und verfahren weiter durch Berechnung des Mittelpunktes $x_2 = \frac{b-x_2}{2}$ und testen. Wenn $f(x_1) > 0$, dann verfahren wir in gleicher Weise auf dem Intervall $[a, x_1]$. Wie wir später sehen werden, kann man unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion f (nämlich das sie stetig ist) und der Benutzung des Vollständigkeitsaxioms folgern, daß die so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle von f strebt. Dieses Verfahren heißt Intervallhalbierungsverfahren. Das Verfahren wird im Abschnitt 3.15 näher behandelt.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen ist hier von zentraler Bedeutung. Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$ hat beispielsweise keine Nullstelle, da $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Hier überspringt also die Funktion die x-Achse obwohl die Funktion stetig ist. Siehe Dazu auch Übungsaufgabe 2.7 auf Seite 53 sowie das Kapitel 5.

Schauen Sie sich auf Geogebra mal das Beispiel Intervallhalbierungsverfahren. Dort haben Sie die Möglichkeit ein bisschen mit verschiedenen Funktionen zu experimentieren.

3.2 Definition. Monotonie. Beschränktheit

Wir starten mit

> **Definition 3.1** (Zahlenfolge).
> *Eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ heißt* ***Zahlenfolge*** *und wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.*
> *Für $n \in \mathbb{N}$ heißt a_n* ***Element*** *der Folge bzw. n-tes* ***Folgenglied****.*

Wir schreiben für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (beispielsweise) auch

$$(a_n)_n = a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{oder (besser!)} \tag{3.2.1}$$
$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Wenn es sich anbietet, werden wir Folgen mit $\mathbb{N}_0$ anstatt $\mathbb{N}$ indizieren.
Wenn möglich, dann kann man für die Elemente a_n auch eine **Bildungsvorschrift** in Abhängigkeit von n angeben. Beispielsweise $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$[1]. Man schreibt dann auch $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Im Prinzip kann die Folge natürlich in jeden Zahlenbereich abbilden, d.h. die a_n können Elemente aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein. (Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden wir später einführen.) Allerdings brauchen wir die Eigenschaften der reellen Zahlen an dieser oder jener Stelle. Beispielsweise gibt es Folgen rationaler Zahlen die eine irrationale Zahl als Grenzwert (Begriffsklärung bald) haben. Würden wir uns auf die rationalen Zahlen beschränken wollen, dann hat diese Folge keinen Grenzwert. Dies hat mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen zu tun bzw., daß die rationalen Zahlen das Vollständigkeitsaxiom ebene nicht erfüllen.

In der Definition haben wir gesagt, daß Zahlenfolgen Funktionen sind. Wieso schreiben wir dann nicht $a(n)$ anstelle von a_n? Zum einen hat das historische Gründe und zum anderen, daß werden Sie sehen, steigern wir auch die Lesbarkeit von Formeln.

[1]Hier läßt man $n \in \mathbb{N}$ oft weg da Folgen stets natürliche Zahlen als Argumente haben. Kontext!

Übungsaufgabe 3.1.
Überlegen Sie sich mindestens zwei weitere Wege, wie man Zahlenfolgen noch angeben bzw. darstellen kann.

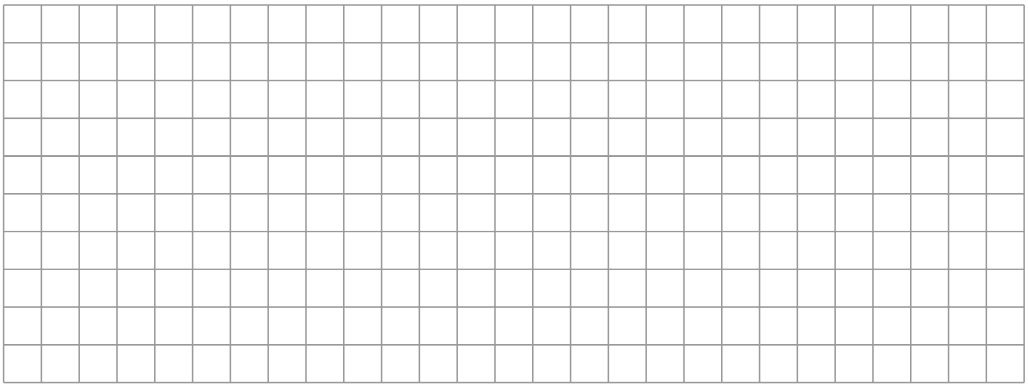


Abbildung 3.1: Darstellung von Folgen 1.

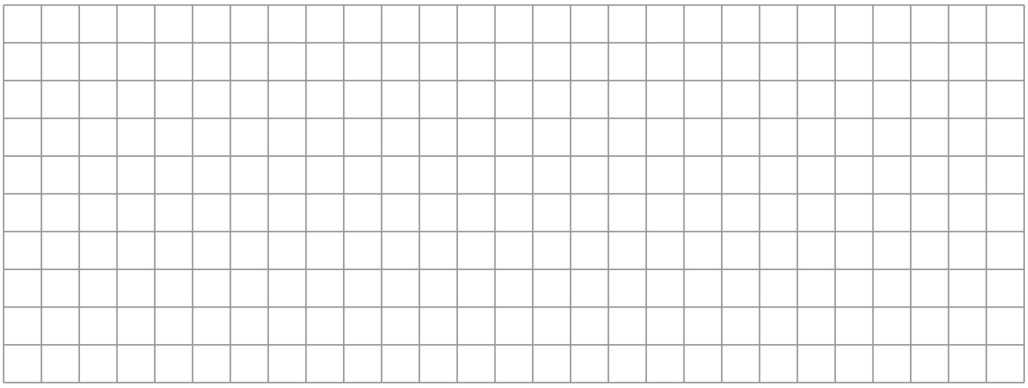


Abbildung 3.2: Darstellung von Folgen 2.

Die erste Eigenschaft die wir untersuchen wollen, ist die schon erwähnte Monotonie.[2] Wie auch schon erwähnt, gilt die nachfolgende Definition nur für reelle Zahlenfolgen.

Definition 3.2 (Monotonie von Zahlenfolgen)**.**
Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- ***monoton wachsend*** *(oder monoton nicht fallend) wenn für alle $n \geq 1$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$. Wenn sogar $a_{n+1} > a_n$ gilt, so heißt die Folge streng monoton wachsend.*
- ***monoton fallend*** *(oder monoton nicht wachsend) wenn für alle $n \geq 1$ gilt $a_{n+1} \leq a_n$. Wenn sogar $a_{n+1} < a_n$ gilt, so heißt die Folge streng monoton fallend.*
- ***(streng) monoton*** *falls sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Übungsaufgabe 3.2.
Finden sie charakteristische Beispiele und Nichtbeispiele für die obige Definition.

[2]Vergleichen Sie diese Definition mit Definition 1.10 und machen Sie sich klar, daß sie für Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ äquivalent sind.

Eine weitere wichtige und sehr anschauliche Eigenschaft von Zahlenfolgen ist Beschränktheit. Die Definitionen sind nicht neu und hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Sie ergeben sich aus Definition 2.1 mit $M = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ (bzw. $\{|a_n| : \ n \in \mathbb{N}\}$ in Bemerkung 3.1) und wenden die Begriffe entsprechend an.

Definition 3.3 (Obere/Untere Schranke)**.**
Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt genau dann

- ***nach unten beschränkt** wenn eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert für die gilt*

$$a_n \geq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Die Zahl C heißt dann eine **untere Schranke**.*

- ***nach oben beschränkt** wenn eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert für die gilt*

$$a_n \leq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Die Zahl C heißt dann eine **obere Schranke**.*

- ***beschränkt*** *wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist oder äquivalent zwei Konstanten* $c, C \in \mathbb{R}$ *existieren für die gilt*

$$c \leq a_n \leq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 3.1.
Die Beschränktheit einer reellen Folge ist äquivalent zu folgender Aussage: Es existiert eine reelle Konstante $C > 0$ *mit*

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diese Definition ist auch für Folgen komplexer Zahlen (siehe Kapitel 10) sinnvoll.

3.2.1 Teilfolgen

Wir beginnen mit einem Beispiel. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der natürlichen Zahlen, also $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$ u.s.w.
Wir bilden nun eine neue Folge $b_n = a_{2n}$. Dies ist dann die Folge der geraden Zahlen, da gerade die a_n mit geradem Index n herausgepickt werden. Eine solche Folge nennt man eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Man schreibt für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $2, 4, 6, ...$ ist.

Wir können natürlich auch jedes k-te Glied für $k \in \mathbb{N}$ nehmen oder das 1., dann das 5., dann das 17., dann das 154. usw. Was wir nicht zulassen sollten, ist erst das 3. und dann das 1. zu nehmen. Wenn wir eine Teilfolge wollen, so sollte die Ordnung der Indizes erhalten bleiben, d.h. wir sollten verlangen, daß die Indizes die wir auswählen eine streng monoton wachsende Folge bilden.

Diese Überlegungen führen zu

Definition 3.4 (Teilfolgen)**.**
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen.
Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine ***Teilfolge*** *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
Wir schreiben manchmal auch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.[a]

[a]Mit dieser Notation ist zu beachten, daß eine Folge nicht einfach eine Menge ist, sondern die Reihenfolge der Elemente wichtig ist!

Übungsaufgabe 3.3.

Konstruieren Sie Beispiele für Definition 3.4.

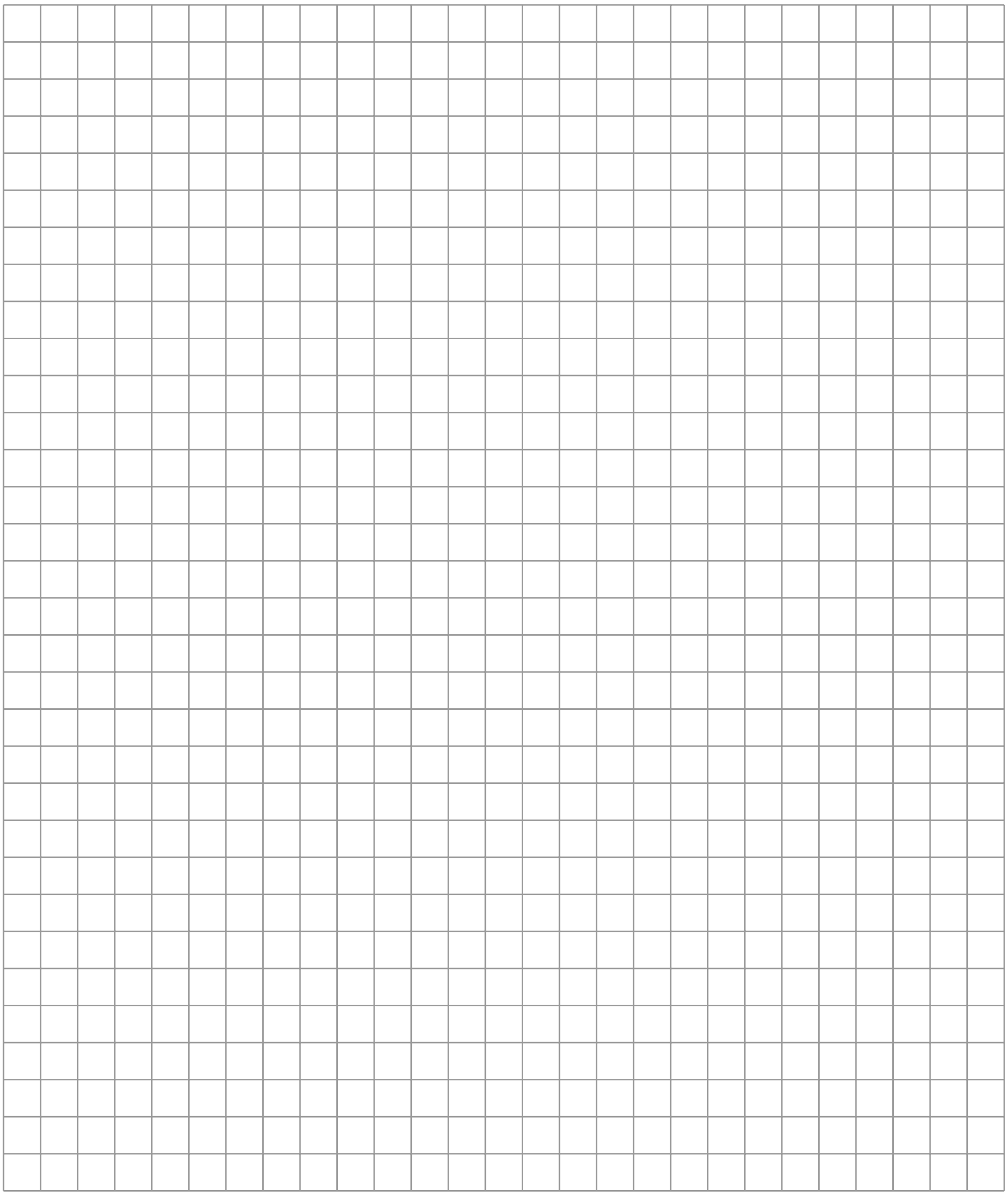


Abbildung 3.3: Beispiele für Definition 3.4.

Eigenschaften von Teilfolgen

Die Leserin ist eingeladen, die folgenden Aussagen im Detail zu beweisen um den richtigen Umgang mit Teilfolgen zu üben.

Hilfssatz 3.1.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.
Dann gilt:

1. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann (streng) monoton wachsend, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton wachsend ist.*

2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann (streng) monoton fallend, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend ist.*

Hilfssatz 3.2.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.
Dann gilt:

1. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist.*

2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann nach unten beschränkt, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt ist.*

3. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.*

Es ist klar, daß nicht jede Folge monoton ist. Wenn man aber mit ein paar Beispielen arbeitet, so kann sich der Gedanke aufdrängen, daß jede Folge eine monotone Teilfolge enthält.

Das wollen wir präzisieren.

> **Satz 3.1** (Monotone Teilfolgen)**.**
> *Jede reelle Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *enthält eine monotone Teilfolge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Zum Beweis führen wir das folgende Werkzeug ein. Ein Term $a_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Spitze**, wenn $a_n \leq a_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$.
Es gibt also jetzt drei Fälle:

Fall I Es gibt unendlich viele Spitzen in $(a_n)_{n_0}$. Da dann die Teilfolge der Spitzen eine monoton fallende Teilfolge

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots a_{n_k} \geq \ldots$$

in $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden

Fall II Es gibt keine Spitzen. Dann nehmen wir $k_1 = 1$, also a_1 und es gibt ein $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$ mit $a_{k_2} > a_{k_1}$. Da es weiter keine Spitzen gibt, kann man diesen Vorgang wiederholen und so eine monoton wachsende Teilfolge auswählen.

Fall III Es gibt endliche viele Spitzen $a_{m_1}, \ldots a_{m_k}$. Man wählt als erstes Glied einen Index $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 > m_k$. Danach argumentiert man wie in Schritt II um eine monoton wachsende Teilfolge auszuwählen.

□

3.3 Bestimmt divergente Zahlenfolgen

In diesem Abschnitt werden wir klären, was es heißt, daß eine reelle Folge nach Unendlich (Symbol[3] ∞) strebt.

Wir geben

Definition 3.5 (Bestimmte Divergenz nach ∞)**.**
Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strebt genau dann nach Unendlich, in Symbolen $a_n \to \infty$, wenn für alle $C \in \mathbb{R}$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n \geq C$.

Bemerkung 3.2.
*Man nennt ∞ in diesem Fall oft einen **uneigentlichen Grenzwert**; dies ist, wenn man sich die Definition im Vergleich zu Definition 3.6 anschaut, auch gerechtfertigt. Ich persönlich finde diese Regelung für Studierende aber verwirrend und bevorzuge den Begriff **bestimmte Divergenz**. Für uns sollen Grenzwerte von reellen Zahlenfolgen nur Elemente der reellen Zahlen sein und $\pm\infty$ ist **kein** Element der reellen Zahlen. Wir sagen also: Wenn für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $a_n \to \infty$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bestimmt divergent**.*

Bemerkung 3.3.
In der Definition können wir uns auch auf positive C beschränken. Wie Sie leicht selbst nachweisen, sind die entsprechenden Definitionen äquivalent, d.h wenn $a_n \to \infty$ nach der einen gilt, dann auch nach der andren und umgekehrt.

[3]Dieses Symbol für Unendlich wurde von Wallis in 1656 eingeführt.

Beispiel 3.1.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n$ *geht nach unendlich:*
Sei $C \in \mathbb{R}$ *beliebig. Es existiert nun ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $C < n_0$ *(Satz von Archimedes, Satz 2.4). Folglich gilt für alle* $n \geq n_0$ *auch* $n > C$.
(Sie sehen, wenn $C < 0$*, dann ist* n_0 *einfach* 1.*)*

Beispiel 3.2.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^k$, $k \in \mathbb{N}$ *geht nach unendlich:*
Sei $C \in \mathbb{R}$ *beliebig. Es existiert nun ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $C^{\frac{1}{k}} < n_0$ *(Satz von Archimedes, Satz 2.4). Folglich gilt für alle* $n \geq n_0$ *auch* $n^k > C$.
Dabei haben wir auch die Monotonie der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ *benutzt.*

Beispiel 3.3.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ *geht nach unendlich:*
Sei $C \in \mathbb{R}$ *beliebig. Es existiert nun ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $C^{\frac{1}{\alpha}} < n_0$ *(Satz von Archimedes, Satz 2.4). Folglich gilt für alle* $n \geq n_0$ *auch* $n^k > C$.
Dabei haben wir auch die Monotonie der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ *benutzt.*

Wir werden von nun an den Satz von Archimedes nicht jedes mal erwähnen, weil dies eine so natürliche Eigenschaft der reellen und natürlichen Zahlen ist.

Offensichtlich gilt

Hilfssatz 3.3.
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende unbeschränkte Folge ist, dann gilt* $a_n \to \infty$.

Übungsaufgabe 3.4.
Geben Sie eine Definition für $a_n \to -\infty$ *für Zahlenfolgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(Es gibt zwei vernünftige Ideen.)*

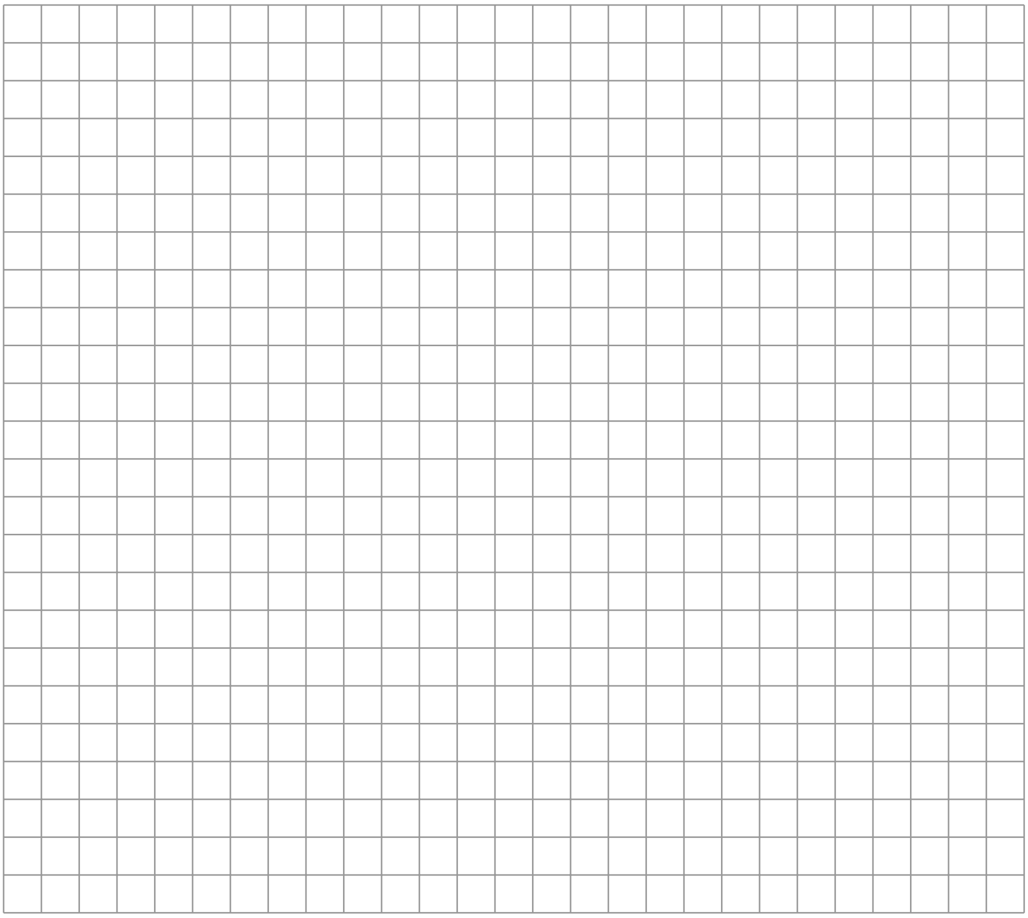


Abbildung 3.4: Definition 1: In Relation zu Definition 3.5.

3.3.1 Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen

Es ist immer sinnvoll, sich gleich Rechenregeln zu verschaffen. Diese erlauben es dann aus elementaren Beispielen kompliziertere zu bauen ohne das man die Eigenschaften jedes Mal nachweisen muß. Beispielsweise ergibt sich $n^k \to \infty$ für $k \in \mathbb{N}$ induktiv aus $n \to \infty$ mit Regel (iv) im nächsten Satz.

Satz 3.2 (Rechenregeln)**.**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \to \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit $b_n \to \infty$ ist, dann gilt auch $a_n + b_n \to \infty$ für $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Wenn für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $b_n \geq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $b_n \to \infty$.

(iii) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$, dann $\lambda a_n \to \infty$.

(iv) Wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit $b_n \to \infty$ ist, dann gilt $a_n b_n \to \infty$ für $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Wir beweisen die einzelnen Aussagen separat. Wir benutzen dabei nur die die Definition.

(i) Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $a_n \to \infty$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \frac{C}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Da $n_n \to \infty$, existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $b_n > \frac{C}{2}$ für alle $n \geq n_2$. Damit gilt für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$$a_n + b_n > \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C.$$

also $a_n + b_n \to \infty$.

(ii) Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $a_n \to \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$b_n \geq a_n > C$$

also $b_n \to \infty$.

(iii) Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $a_n \to \infty$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \frac{C}{\lambda}$. Damit gilt für $n \geq n_0$

$$\lambda a_n > \lambda \frac{C}{\lambda} = C.$$

also $\lambda a_n \to \infty$.

(iv) Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $b_n \to \infty$ existiert ein Index $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \geq 1$ für $n \geq n_1$. Da $a_n \to \infty$, existiert ein Index $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C$ für $n \geq n_2$. Dann gilt für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$$a_n b_n \geq a_n > C.$$

Folglich gilt $a_n b_n \to \infty$.

$\square$

Übungsaufgabe 3.5.
Passen Sie die Rechenregeln für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \to -\infty$ an; gibt es sinnvolle Regeln für zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$?

3.4 Definition Konvergenz

Definition 3.6 (Konvergenz und Grenzwert)**.**
*Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt genau dann **konvergent**, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert für das gilt: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß die Abschätzung*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

*für alle $n \geq n_0$ gilt. Wir sagen dann, daß a der **Grenzwert** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist und schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

*oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, bzw. kürzer $a_n \to a$. Eine Zahlenfolge die nicht konvergent ist, heißt **divergent**. Wenn die Zahlenfolge konvergiert und $a = 0$ ist, dann heißt sie **Nullfolge**.*

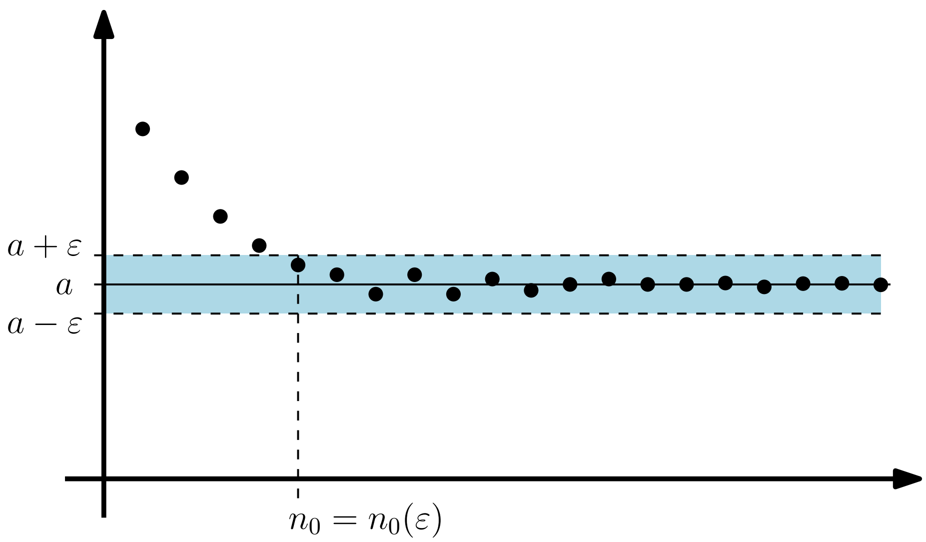


Abbildung 3.5: Für hinreichend großes n liegen die Folgenglieder a_n beliebig nahe am Grenzwert a, d.h. sie erfüllen $|a_n - a| < \varepsilon$ für beliebig kleines $\varepsilon > 0$.

Bemerkung 3.4.
*Aus der Definition ist klar, das eine endliche Anzahl von Folgegliedern für die Frage nach Konvergenz keine Rolle spielt, man kann stets beliebig aber endlich viele Folgeglieder ignorieren. Daraus ergibt sich, daß man Bedingungen nicht für alle Folgeglieder sondern nur für fast alle fordern muß. Mit **für fast alle** meinen wir von nun an (in Bezug auf Folgen), **bis auf endlich viele**.*

Aus der Definition erhalten wir sofort den

Hilfssatz 3.4.
Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $a_n - a \to 0$.

Übungsaufgabe 3.6.
Beweisen Sie Hilfssatz 3.4. Schreiben Sie alle Details sorgfältig auf. (Es gibt nicht viele.)

Es ist auch nicht weiter schwer, eine Aussage über die Teilfolgen konvergenter Folgen zu beweisen. Wir haben

Hilfssatz 3.5.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn alle Teilfolgen den gleichen Grenzwert haben.*

Übungsaufgabe 3.7.
Beweisen Sie Hilfssatz 3.5. Schreiben Sie alle Details sorgfältig auf; insbesondere sollten Sie die Richtungen [$\Rightarrow$*] und [*$\Leftarrow$*] getrennt betrachten.*

3.5 Erste Beispiele konvergenter Folgen

Als erstes zeigen wir

Hilfssatz 3.6.
Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Eine leichte Verallgemeinerung der letzten Aussage ist

Hilfssatz 3.7.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Zahlenfolge mit* $a_n \to \infty.$
Dann gilt $\frac{1}{a_n} \to 0.$

Natürlich fällt Hilfssatz 3.6 durch den Hilfssatz 3.7 mit ab aber wir wollen uns im Aufschreiben von Konvergenzbeweisen üben.

Nun zu einer etwas schwierigeren aber auch wichtigen Folge.

Satz 3.3.
Es sei $a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & : \quad a > 1 \\ 0 & : \quad |a| < 1 \\ 1 & : \quad a = 1 \end{cases}$$

Wenn $a \leq -1$, dann ist die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Bemerkung 3.5.
Es lässt sich nicht mehr sagen als das. Wenn $a < -1$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und unten unbeschränkt geht aber weder nach ∞ noch nach $-\infty$. Dieser Satz wird in Sektion 3.11 eine wesentliche Erweiterung erfahren.

Beweis. Wir beweisen die Grenzwerte einzeln. Wesentlichen Hilfsmittel ist der gerade bewiesene Hilfssatz und die Bernoullische Ungleichung. Im letzten Teil erlauben wir uns einen minimalen Vorgriff weil es bequem ist, dieses Beispiel jetzt zu behandeln. Die Aussage ist intuitiv und wir vergeben uns nichts.

(i) Für $a = 1$ ist nichts zu tun.

(ii) Sei $a > 1$. Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} a &= 1 + a - 1 \\ &= 1 + x, \quad x = a - 1 > 0. \end{aligned}$$

Mit der Bernoullischen Ungleichung (Satz 2.12) erhalten wir

$$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \geq nx.$$

Da $n \to \infty$, folgt $1 + nx \to \infty$ und damit $a^n \to \infty$. (Siehe die Rechenregeln für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to \infty$. Siehe Abschnitt 3.3.)

(iii) Sei $|a| < 1$. Dann gilt $\frac{1}{|a|} > 1$. Folglich gilt nach (ii) $\frac{1}{|a|^n} \to \infty$ und nach dem letzten Hilfssatz dann $|a|^n \to 0$.

(iv) Für $a \leq -1$ gilt $a^n = (-1)^n |a|^n$ (da $a = -|a|$) und die Folge $|a|^n$ ist für $a < -1$ nach (ii) unbeschränkt und die Aussage folgt nach Satz 3.6. (Die Details für $a = -1$ sollten Sie selbst ausführen.)

$\square$

Bemerkung 3.6.
Mit dem letzten Satz ist die Frage nach Grenzwerten für geometrische Folgen, also solche für die $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *konstant ist, restlos geklärt. Am Ende dieses Kapitels werden wir unter Benutzung dieses Resultats, zeigen, daß wir auch das Verhalten von Folgen wie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \frac{n^3}{4^n}$ *vollständig charakterisieren können. Siehe Satz 3.10.*

Zusammenfassung der Schritte von Konvergenzbeweisen:

1) Man setze die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ den Term a_n und die Zahl a ein.

2) Man vereinfache den Term in dem Betrag so weit wie möglich.

3) Man schreibe die Ungleichung durch Abschätzung ohne Betrag.

4) Man lösen die resultierende Ungleichung nach n auf. Dies liefert $n > T(\varepsilon)$.

5) Schreibe den Beweis in der korrekten Form: Sein $\varepsilon > 0$ bel. und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > T(\varepsilon)$ ...

3.6 Eigenschaften konvergenter Folgen

Wir wollen uns noch überzeugen, daß es gerechtfertigt ist von **dem** Grenzwert einer Folge zu sprechen und nicht nur von **einem** Grenzwert.

Satz 3.4 (Eindeutigkeit von Grenzwerten)**.**
Der Grenzwert einer konvergenten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien a und a' zwei **verschiedene** Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wollen zeigen, daß $a = a'$ gelten muß. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$. Mit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$0 \leq |a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Wäre nun $a \neq a'$, könnten wir $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - a'|$ setzen und bekämen mit $|a - a'| < \frac{1}{2}|a - a'|$ einen Widerspruch. □

Intuitiv sind konvergente Folgen beschränkt. Der nachfolgende Hilfssatz bestätigt dies.
Dies ist auch ein Hilfsmittel um Konvergenz auszuschließen. Bilden Sie dazu die Kontraposition der Aussage; siehe Seite 7.

Hilfssatz 3.8 (Beschränktheit konvergenter Folgen)**.**
Jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt.*

Beweis. Da $a_n \to a$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq n_0$. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann

$$1 \geq |a_n - a| \geq |a_n| - |a|$$

für alle $n \geq n_0$. In anderen Worten gilt also $|a_n| \leq 1 + |a|$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wenn

$$M = \max \left\{ 1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_{n_0 - 1}| \right\} .$$

$\square$

Bemerkung 3.7.
Die Umkehrung von Satz 3.8 gilt im allgemeinen nicht. Siehe dazu auch das Beispiel 3.4. Wir werden allerdings sehen, daß beschränkte Folgen stets konvergente Teilfolgen enthalten. Siehe dazu Satz 3.12.

3.7 Divergente Folgen

Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent, wie wir in Definition 3.6 festgelegt haben. Hier wollen wir das etwas ausführen, insbesondere um zu diskutieren, daß die Umkehrung von Hilfssatz 3.8 nicht gilt.

Nach unser Definition von Konvergenz gilt: eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, wenn

> Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:
> es existiert ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Wir bemerken, daß diese Definition insbesondere für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to \infty$ gilt; dies rechtfertigt den Namen bestimmt **divergent**.

Beispiel 3.4.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$. Die für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ist nicht weiter zu zeigen, man wähle das $\varepsilon > 0$ als

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{|a-1|}{2}, \frac{|a+1|}{2}\right\}.$$

Also sind beschränkte Folgen nicht notwendig konvergent.

3.8 Rechenregeln für konvergente Folgen

Im nächsten Satz wollen wir uns ein paar Regeln verschaffen, mit denen wir aus konvergenten Folgen weitere konvergente Folgen erzeugen können.

Satz 3.5 (Rechenregeln für konvergente Folgen)**.**
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwerten a und b.
Dann gelten folgende Aussagen:

(1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergiert $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

(2) Das Produkt $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

(3) Falls $b_n \neq 0$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, dann konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist nicht schwer. Es handelt sich nur um eine konsequente Anwendung der Definition von Konvergenz, der Anwendung der Dreiecksungleichung und der **aktiven** Null bzw. Eins.

(i) Da $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt, existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} n \geq n_1\colon &\quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)}, \\ n \geq n_2\colon &\quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)}. \end{aligned}$$

Die $+1$ in den Nennern wird gebraucht, da α und β auch 0 sein können. Dann gilt für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned}|\alpha a_n + \beta b_n - \alpha a - \beta b| &= |\alpha a_n - \alpha a + \beta b_n - \beta b| \\ &\leq |\alpha a_n - \alpha a| + |\beta b_n - \beta b| \\ &\leq |\alpha||a_n + a| + |\beta||b_n - b| \\ &\leq \frac{|\alpha|}{2(1+|\alpha|)}\varepsilon + \frac{|\beta|}{2(1+|\beta|)}\varepsilon < \varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\alpha a + \beta b$.

(ii) Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie auch beschränkt, d.h. es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin existieren, da auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, Indizes $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} n \geq n_1\colon \quad & |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}, \\ n \geq n_2\colon \quad & |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}.\end{aligned}$$

Es gilt für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &\leq \frac{M}{2(1+M)}\varepsilon + \frac{|b|}{2(1+|b|)}\varepsilon < \varepsilon\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ab.

(iii) Den Beweis des Satzes für Quotienten überlassen wir der furchtlosen Leserin. Es genügt zu zeigen, daß

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$$

da wir die Aussage über Produkte verwenden können. Orientieren Sie sich an den beiden vorigen Argumenten für die Beweisführung. Als Hinweis sei noch gegeben, daß, unter den gegebenen Voraussetzungen, stets ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ für $n \geq n_1$.

$\square$

Wichtig ist, daß wir Grenzwerte mit der Betragsfunktion vertauschen können. Im Kapitel Stetigkeit von Funktionen werden wir in dieser Richtung weiter gehen.

Satz 3.6.
Für eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n \to a$ *folgt* $|a_n| \to |a|$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Mit der (unteren) Dreiecksungleichung folgt

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$$

und damit $\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt $|a_n| \to |a|$. □

Folgerung 3.1.
Für eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt* $a_n \to 0$ *genau dann, wenn* $|a_n| \to 0$.

Übungsaufgabe 3.8.
Beweisen Sie die Folgerung 3.1. Machen Sie sich an einem Beispiel klar, daß die Umkehrung in Hilfssatz 3.6 nicht gilt.

Hilfssatz 3.9 (Grenzwerte respektieren Ungleichungen)**.**
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann gilt $a \leq b$.

Bemerkung 3.8.
*Strikte Ungleichungen werden **nicht** erhalten. Beispielsweise gilt für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ die Ungleichung $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber der Grenzwert ist gleich 0.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch. Es sei also $a > b$ und setze $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$.[4] Da $a_n \to a$ und $b_n \to b$, existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} n \geq n_1 \colon &\quad |a_n - a| < \varepsilon, \\ n \geq n_2 \colon &\quad |b_n - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

also insbesondere

$$a - \varepsilon < a_n \quad \text{und} \quad b_n < b - \varepsilon$$

für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Nun gilt

$$n \geq n_0 \colon \quad b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n$$

womit dann $b_n < a_n$ für $n \geq n_0$ gilt.[5] Dies widerspricht der Voraussetzung und damit ist unsere Annahme $a > b$ falsch. Folglich ist $a \leq b$. □

[4] Die Leserin sollte sich an dieser Stelle nicht wundern, woher man weiß, daß man hier die $\frac{1}{3}$ braucht. Das weiß man erst später und schreibt den Beweis dann so daß es paßt. Finden Sie die Stellen an der man diese Bedingung braucht?

[5] Hier war der Punkt, richtig? Wir brauchten etwas um die obigen Ungleichungen zu verwenden, genauer $b + \varepsilon < a - \varepsilon$. Wir brauchen also ein $\varepsilon > 0$ das kleiner ist als $\frac{1}{2}(a-b)$. Also nehmen wir $\frac{1}{3}(b-a)$.

3.9 Konvergenzkriterien

Der nächste Satz verallgemeinert Hilfssatz 3.9 in ein kraftvolles Konvergenzkriterium.

Satz 3.7 (Polizistenprinzip)**.**
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ und $a_n \leq b_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$.
Weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergent mit Grenzwert x.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to x$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_n - x > -\varepsilon$ für alle $n \geq n_1$ und da $b_n \to x$ existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $b_n - x < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Dann gilt für $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$-\varepsilon < a_n - x \leq x_n - x \leq b_n - x < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Damit gilt $x_n \to x$ nach Hilfssatz 3.4. □

Oftmals führen viele Wege nach Rom. Das für $k \in \mathbb{N}$ auch $n^{-k} \to 0$ gilt folgt per Induktion aus den Rechenregeln für konvergente Folgen (Satz 3.5). Mit dem Polizistenprinzip:

Beispiel 3.5.
Da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $n^k \geq n$, folgt aus dem Polizistenprinzip, da

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

daß $(n^{-k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Ein leicht schwierigeres Beispiel.

Beispiel 3.6.
Wir zeigen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$a_n := \frac{2n^2+1}{3n^3+2n^2+n+1}$$

gegen 0 *konvergiert. Wir haben*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{2n^2+1}{3n^3+2n^2+n+1}\right| = \frac{2n^2+1}{3n^3+2n^2+n+1} \\ &\leq \frac{3n}{3n^3+2n^2+n+1} \\ &\leq \frac{3n}{3n^3} = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da nach Hilfssatz 3.7 die rechte Seite nach 0 *strebt, folgt die gewünschte Aussage nach dem Polizistenprinzip.*

Beschränkte Folgen sind im allgemeinen nicht konvergent, dies hatten wir vorher schon diskutiert. Siehe Seite 94. Wenn die betrachtete Folge monoton ist, dann gilt der intuitive

Satz 3.8 (Monotone Konvergenz)**.**
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge.

1. *Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist und der Grenzwert a ist gegeben durch*

$$a = \sup_{n\geq 1} a_n = \sup\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}.$$

2. *Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt ist und der Grenzwert a ist gegeben durch*

$$a = \inf_{n\geq 1} a_n = \inf\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Übungsaufgabe 3.9.
Beweisen Sie Satz 3.8. Zum Beweis benötigen Sie nur die beteiligten Definitionen und die Aussagen (i) und (iv) von Satz 2.1.

3.10 Weitere Beispiele konvergenter Folgen

Aus Hilfssatz 3.6 oder den Rechenregeln aus Satz 3.5 erhalten wir durch vollständige Induktion (oder das Polizistenprinzip) ohne Schwierigkeit

Hilfssatz 3.10.
Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\frac{1}{n^k} \to 0$.

Mit diesem Hilfssatz und den Rechenregeln aus Satz 3.5 folgt

Satz 3.9.
Es seien $k, l \in \mathbb{N}$. Weiter seien $a_k, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_k \neq 0$ und $b_l, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $b_l \neq 0$.
Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \ldots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \infty & : \; k > l,\ \frac{a_k}{b_l} > 0 \\ -\infty & : \; k > l,\ \frac{a_k}{b_l} < 0 \\ \frac{a_k}{b_l} & : \; k = l \\ 0 & : \; l > k \end{cases}$$

Übungsaufgabe 3.10.
Führen Sie die Details des Beweises für Satz 3.9 aus. Rechtfertigen Sie Ihre Rechnungen. Schreiben Sie Beispiele für jeden Fall auf und zeigen sie diese direkt.

Hilfssatz 3.11.
Sei $a \in [0, \infty)$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3.11 Das d'Alembert'sche Quotientenkriterium

Wir haben schon die möglichen Grenzwerte für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$ studiert. Siehe Sektion 3.5, im speziellen Satz 3.3. Das besondere an dieser Folge ist, daß sie geometrisch ist also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$$

ist konstant. Man kann nun Hoffen, daß wir eine ähnliche Untersuchung für folgen machen können, die sich 'asymptotisch' wie geometrische Verhalten. der folgende Satz fasst das mögliche zusammen.

Satz 3.10 (d'Alemberts Quotientenkriterium)**.**
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge positiver Zahlen und es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $|q| < 1$, dann $a_n \to 0$.

(ii) Wenn $q > 1$, dann $a_n \to \infty$ falls $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Wenn $q > 1$, dann $a_n \to -\infty$ falls $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Falls $|q| = 1$, dann haben wir keine Information.

Beweis. Wir beweisen hier nur die Aussagen (i),(ii) und (iv) da diese für uns von besonderer Wichtigkeit sind.

(i) Es sei $r \in (q, 1)$ und $\varepsilon = r - q > 0$. Da $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq n_0 \colon \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt dann

$$n \geq n_0: \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + (r - q) = r.$$

Damit gilt dann für $n \geq 1$, wenn $n \geq n_0$, daß $a_{n+1} < ra_n$, insbesondere gilt $a_{n_0+1} < ra_{n_0}$. Wir benutzen diese Ungleichung iterativ um

$$a_{n_0+n} < ra_{n_0} < r^2 a_{n-2} < \ldots < r^n a_{n_0}$$

zu erhalten. Nach dem Polizistenprinzip (Satz 3.7) gilt dann $a_n \to \infty$ da nach Satz 3.3 gilt $r^n a_{n_0} \to 0$.

(ii) Es sei $r \in (1, q)$ und $\varepsilon = q - r > 0$. Da $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq n_0: \qquad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Insbesondere also $q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ for $n \geq n_0$. Also

$$n \geq n_0: \qquad ra_n < a_{n+1}.$$

Wie zuvor erhalten wir für $n \geq 1$, daß

$$a_{n_0+n} > a_{n_0} r^n. \tag{3.11.1}$$

Da nach Satz 3.3 gilt $r^n \to \infty$ folgt nach den Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen $a_n \to \infty$.

(iii) Da $a_n \to -\infty$ genau dann, wenn $-a_n \to \infty$, folgt diese Aussage von der letzten. Die Leserin sollte allerdings versuchen, das ober Argument anzupassen und diesen Fall direkt zu bearbeiten.

(iv) Hier sind Beispiele anzugeben. Beispielsweise gilt $q = 1$ für $a_n = n$. Den Rest überlasse Ich der Leserin.

□

3.12 Cauchysches Konvergenzkriterium

Ein weiteres wichtiges Kriterium ist das Cauchy'sche Konvergenzkriterium. Es hat den Vorteil daß es die Konvergenz einer Folge ohne Referenz zum Grenzwert angibt.

Satz 3.11 (Cauchysches Konvergenzkriterium).
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn

> *für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$:*
> *für alle $m, n \geq n_0$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Eine Folge die das Cauchy-Kriterium erfüllt nennt man auch ***Cauchy-Folge*** *oder* ***Fundamentalfolge****.*

Bemerkung 3.9.
Für reelle oder komplexe Folgen gilt der obige Satz. Für Folgen in $\mathbb{Q}$ gilt er im allgemeinen nicht. Dort gibt es folgen die Cauchy sind, aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert haben. Die Eigenschaft, daß Cauchy-Kriterium und Konvergenz äquivalent sind nennt man Vollständigkeit.

Beispiel 3.7.
Wir benutzen das Cauchysche-Konvergenzkriterium um zu zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$n \geq 1: \quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \tag{3.12.1}$$

Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2^{k+1}, n = 2^k \geq n_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| = |a_{2^{k+1}} - a_{2^k}| &= \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &\geq \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

da für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq 2^k$ gilt

$$\frac{1}{2^k + l} \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Übungsaufgabe 3.11.

Zeigen Sie, daß eine Folge genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn alle Teilfolgen Cauchy-Folgen sind.

Beispiel 3.8.
Wir benutzen das Cauchysche-Konvergenzkriterium um zu zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n = (-1)^n$, divergent ist.
Wir wählen wieder $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $n = 2n_0, m = 2n_0 + 1 \geq n_0$ und

$$|a_m - a_n| = |(-1)^{2n_0} - (-1)^{2n_0+1}| = 2 \geq \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir nochmal gezeigt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ divergent ist.

3.13 Häufungspunkte von Folgen

F'ur das Weitere brauchen wir noch den Begriff des Häufungspunktes einer Folge. Mit ihm werden wir einfach Grenzwerte von Teilfolgen bezeichnen. So hat dann beispielsweise $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte -1 und 1 da es eine Teilfolge $((-1)^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die 1 bzw. -1 als Grenzwert hat. Hier wären mögliche Kandidaten: $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

Die präzise Definition geben wir in

Definition 3.7 (Häufungspunkte)**.**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge davon.

(i) Wenn die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann nennt man den Grenzwert einen ***Häufungspunkt*** *(oder Häufungswert) von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. An dieser Stelle wollen wir auch bestimmt divergente Folgen (Folgen mit uneigentlichem Grenzwert) zulassen und auch $\pm\infty$ als Häufungspunkte zulassen.*

(ii) Der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***Limes superior****, in Zeichen $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

(iii) Der kleinste te Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***Limes inferior****, in Zeichen $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Zur Klarstellung: mit unseren Definitionen ist $\pm\infty$ ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to +\pm\infty$ für $k\to\infty$.

Bemerkung 3.10.
Mit unserer Definition existiert der Limes superior und der Limes inferior einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *immer, da wir Grenzwerte der Teilfolgen in* $\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$ *zugelassen haben. Wir haben:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k, \tag{3.13.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k. \tag{3.13.2}$$

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß eine Folge genau dann konvergiert, wenn Limes superior und inferior gleich sind wobei der Grenzwert $\pm\infty$ *im Sinne des uneigentlichen Grenzwertes zu verstehen ist.*

Übungsaufgabe 3.12.
Zeigen Sie, daß die in Definition 3.7 gegebene Definition von Limes superior und Limes inferior mit der in den Formeln (3.13.1) *und* (3.13.2) *gegebenen äquivalent sind.*

3.14 Der Satz von Bolzano–Weierstraß

Satz 3.12 (Bolzano–Weierstraß)**.**
Jede beschränkte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *enthält eine konvergente Teilfolge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*. In anderen Worten: Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.*

Übungsaufgabe 3.13.
Benutzen Sie die vorigen Resultate dieses Kapitels um einen Beweis von Satz 3.12 im Falle reeller Folgen zu geben.

3.15 Intervallschachtelung

Satz 3.13 (Intervallschachtelungsprinzip)**.**
Sei $(I)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n\, , \, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|I_n| \to 0$. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}.$$

Bemerkung 3.11.
Wir definieren den großen Durchschnitt $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ wie folgt: Ein Element a ist genau dann in $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, wenn $a \in A_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ und damit auch

$$n, m \in \mathbb{N}\colon \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_m \leq b_{m-1} \leq b_{m-2} \leq \ldots \leq b_1. \quad (3.15.1)$$

Wir setzen nun $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ und $B := \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Diese Mengen sind nichtleer und nach oben bzw. unten beschränkt. Damit können wir $a = \sup(A)$ und $b = \inf(B)$ setzten. Nach (3.15.1) gilt nun

$$n, m \in \mathbb{N}\colon \quad a_n \leq a \leq b_m \quad (3.15.2)$$

und

$$n, m \in \mathbb{N}\colon \quad a_n \leq b \leq b_m \quad (3.15.3)$$

da alle b_m, $m \in \mathbb{N}$ obere Schranken von A sind und alle a_n, $n \in N$ untere Schranken von B. Damit ist a untere Schranke von B, d.h. $a \leq b$. Damit und den Ungleichungen (3.15.2) und (3.15.3) folgt nun

$$n \in \mathbb{N}\colon \quad a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Da nun $0 \leq b - a \leq b_n - a_n = |I_n| \to 0$, gilt $a - b = 0$ also $a = b \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß es keine weiteren Elemente im Durchschnitt gibt. Sei also $c \in \mathbb{R}$ mit $c \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Definition von a und b auch $a \leq c \leq b$ also $a = c = b$. Damit erfaßt der große Durchschnitt $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ genau einen Punkt wie behauptet. □

Bemerkung 3.12.
Wenn Sie sich das Intervallschachtelungsprinzip geometrisch veranschaulichen, dann bedeutet es, daß die reelle Achse keine Löcher hat; dies rechtfertigt auch die Bezeichnung ***Vollständigkeitsaxiom****. Man kann das Intervallschachtelungsprinzip auch zum Vollständigkeitsaxiom erheben und unser Vollständigkeitsaxiom dann aus diesem ableiten.*

Aus Satz 3.13 folgt ein konstruktives Verfahren zur Berechnung von Wurzeln $\sqrt{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Ermittle zuerst die größte Zahl $g \in \mathbb{N}_0$ mit $g^2 \leq c$. (Diese Zahl existiert nach dem Satz von Archimedes, Satz 2.4.)
Es gilt dann $\sqrt{c} \in [a_1, b_1] =: I_1$ mit $a_1 := g$ und $b_1 := g + 1$. Nun wird das Intervall halbiert, d.h. es wird $x_1 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ berechnet. Gilt $x_1^2 \leq c$, dann setzen wir $I_2 = [a_2, b_2]$ mit $a_2 = x_1$ und $b_2 = b_1$ und andernfalls $a_2 := a_1$ und $b_2 := x_1$. Danach wird I_2 halbiert, also $x_2 := \frac{1}{2}(b_2 - a_2)$ und x_2^2 mit c verglichen. Wenn man so fortfährt erhält man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in I_n = [a_n\,,\, b_n]$ und $c \in [a_n^2\,,\, b_n^2]$. Nach Satz 3.13 gibt es nun genau einen Punkt $x \geq 0$ der in allen Intervallen I_n liegt. Es gilt dann auch $a_n^2 \leq x^2 \leq b_n^2$, also $x^2 \in [a_n^2\,,\, b_n^2]$. Da nun

$$0 \leq b_n^2 - a_n^2 = (a_n - b_n)(a_n + b_n) \leq 2b_1|I_n| \to 0.$$

gilt, ist auch $([a_n^2, b_n^2])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung und sie erfasst nach Konstruktion x^2 und c. Damit gilt nach dem Eindeutigkeitsteil von Satz 3.13 dann $x^2 = c$.

3.16 Vertauschung von Grenzwerten mit Funktionen

Man kann sich der Definition Stetigkeit von Funktionen auf verschiedene Weisen nähern. Beispielsweise kann man sich überlegen, welche Eigenschaften der Graph nicht haben soll und die Definition damit motivieren. Weitere Überlegungen dazu kommen in Abschnitt 5; wir wollen hier den Ansatz verfolgen, den Zusammenhang mit konvergenten Folgen auszuarbeiten.

Wir rufen uns Hilfssatz 3.6 ins Gedächtnis. Der besagte: wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

In anderen Worten, wir können die Funktion $|\cdot|$ mit dem Grenzwert vertauschen. Der Beweis floß unmittelbar aus der Dreiecksungleichung da

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| \tag{3.16.1}$$

und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergent vorausgesetzt ist. Die Frage die wir uns hier stellen wollen lautet:

> Welche Bedingung müßen wir an die Funktion f stellen, damit für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\,? \tag{3.16.2}$$

Eine Möglichkeit (die aber nicht zur vollständigen Antwort führt) ergibt sich aus dem Beweis von Hilfssatz 3.6, wenn wir die gleiche Strategie verwenden wollen. Zur Vereinfachung der Situation setzen wir für den Moment voraus, daß $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. In Analogie zu (3.16.1) setzen wir voraus, daß ein $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

> für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$.

Dann bekommen wir

Hilfssatz 3.12.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe die obige Eigenschaft. Wenn für eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n \to a$ gilt, dann $f(a_n) \to f(a)$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft, daß $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Seil also $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $a_n \to a$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{C}$ für alle $n \geq n_0$. Da nach Voraussetzung

$$|f(a_n) - f(a)| \leq C|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt ist die Aussage bewiesen. □

Die oben gegebene Eigenschaft für f könnten wir zwar zur Stetigkeit erklären aber man kann sich leicht überlegen, daß es Funktionen gibt die (3.16.2) erfüllen aber nicht die obige Eigenschaft.

An dieser Stellen wäre es besser gewesen nicht in den Beweis zu schauen sondern zu Fragen, was wir brauchen damit die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert. Nach Definition 3.6 müßen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden können mit $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$. Wir wissen, daß für jedes $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \delta$ für $n \geq n_0$ existiert. A priori besteht kein Zusammenhang zwischen ε und δ. Im vorigen Beispiel hatten wir mit unserer Bedingung einen direkten Zusammenhang $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ erzwungen.

Allgemeiner müssen wir voraussetzen, daß ein δ für jedes ε existiert. Wir müßen also für f folgendes fordern:

> Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß
>
> $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x - a| < \delta.$$

Dies wird (im wesentlichen) in Kapitel 5 unsere Stetigkeitsdefinition sein. Folglich sind stetige Funktionen genau jene, für die man die Funktion mit dem

Grenzwert vertauschen kann; man kann auch auch diese Aussage selbst zur Definition erheben.

3.17 Übungs- und Anwendungsaufgaben

Aufgabe 23

Seien $x,\ y \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = \max(|x|, |y|).$$

Aufgabe 24

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(n+1)^4}{n^3(n+2)}, \quad n \geq 1$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 25

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\frac{4n^2+3}{n^2(7-n)}}{\frac{4(n+1)^2+3}{(n+1)^2(7-(n+1))}}, n \geq 8$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 26

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n},\ n \in \mathbb{N}_0$$

gilt: $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Zeigen Sie weiter, daß der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ existiert und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 27

Geben Sie eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift zu einer Folge (a_n) an, deren Glieder wie folgt lauten:

(a) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, ...$

(b) $-2, -5, -8, -11, -14, ...$

Setzen Sie die Folge entsprechend dieser Bildungsvorschrift um drei Glieder fort.
Handelt es sich bei der von Ihnen gefundenen Folge jeweils um eine arithmetische oder geometrische Folge? Wenn ja, bringen Sie die Bildungsvorschrift bitte in die Standardform aus der Vorlesung.

Aufgabe 28

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, daß (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2n-1}$ eine Nullfolge ist. Wie groß ist $n_0 \in \mathbb{N}$ mindestens zu wählen, daß $|a_n| < 10^{-4}$ für $n \geq n_0$ gilt?

Aufgabe 29

Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$, und was ist der entsprechende Wert?

Aufgabe 30

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(i) $a_n = \dfrac{11-n^2}{n+2}$,

(ii) $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}$,

(iii) $a_n = \dfrac{n-4}{n^2+3n+8}$,

(iv) $a_n = \dfrac{3n^5+n^3-1}{12n^5+23}$,

(v) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+n+2}{5n^2+4n+3}$,

(vi) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+2}{5n^3+4n+3}$,

(vii) $a_n = \dfrac{2^n+(-2)^n}{2^n}$,

(viii) $a_n = \dfrac{2^n+(-2)^n}{5^n}$.

Aufgabe 31

Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Ermitteln Sie ggf. den Grenzwert.

(i) $a_n = \dfrac{n+3}{n}$,

(ii) $b_n = 1 + 2^n + (-2)^n$,

(iii) $c_n = \sqrt{1-\cos(\dfrac{1}{n})}$.

Aufgabe 32

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2(1+\frac{1}{n})^n + \sqrt[n]{4n}\right)$.

Aufgabe 33

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(i) $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{9n + 1}$,

(ii) $b_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$,

(iii) $c_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$,

(iv) $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{n\pi}{2}$,

(v) $e_n = n^{(-1)^n}$.

4 Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion

In dieser Sektion folge ich im wesentlichen der Darstellung des Materials in [14]. Grundsätzlich sollte dieses Material in groben Zügen aus der Schule bekannt sein. Wenn das Material, was im wesentlichen zum Selbststudium gedacht ist, Probleme bereitet, dann müssen Sie dringend mit geeigneter Vorkursliteratur den Stoff nachholen.

Wir werden im Kapitel 9 die Exponentialfunktion sowie die trigonometrischen Funktionen sin und cos als Potenzreihen einführen. Bis dahin ist es aber vielleicht nützlich Sie für Beispiele an der Hand zu haben.

4.1 Die trigonometrischen Funktionen

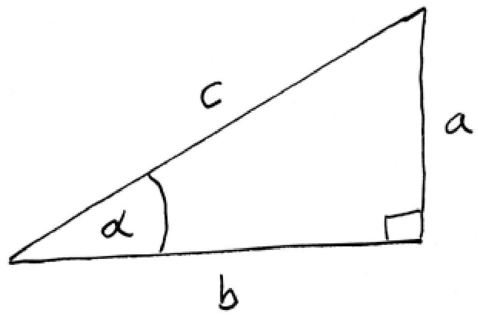


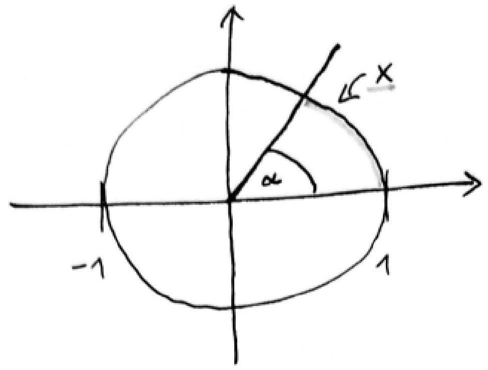
Abbildung 4.1: Ein rechtwinkliges $\sphericalangle(a, b)$ Dreieck zur Definition der Winkelfunktionen auf α.

Definition 4.1 (Winkelfunktionen)**.**
Vorgelegt sei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenlänge $c \in \mathbb{R}$, c und Kathetenlängen a, b. Für Winkel α zwischen 0 und 90° setzen setzen wir:

1. $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ *(Sinus)*
2. $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ *(Cosinus)*
3. $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$ *(Tangens)*
4. $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{b}{a}$.

Dabei sind die jeweiligen Ausdrücke natürlich nur dann definiert, wenn die jeweiligen Brüche für reelle Zahlen definiert sind also im Nenner insbesondere keine 0 steht.

Um die trigonometrischen Funktionen für mehr Winkel einführen zu können, führen wir das *Bogenmaß* ein. Dies ist die gebräuchliche Art, mit der man in der Mathematik "Winkel" misst.



Definition 4.2 (Bogenmaß)**.**
Das ***Bogenmaß*** x *eines Winkels* α *ist die Länge des Kreisbogens, der dem Winkel* α *im Einheitskreis gegenüber liegt; dabei ist der Winkel im mathematisch positiven Sinne, also entgegen dem Uhrzeigersinn, abgetragen.*

Bemerkung 4.1. *Zwischen Winkel und Bogenmaß besteht der Zusammenhang*

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

bzw.

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}.$$

Wenn also ein Winkel α *gegeben ist, so ergibt sich das Bogenmaß als* $x = \frac{\alpha}{180^\circ}\pi$*. Manche schreiben gern die Einheit* rad *dazu aber das wollen wir uns sparen.*

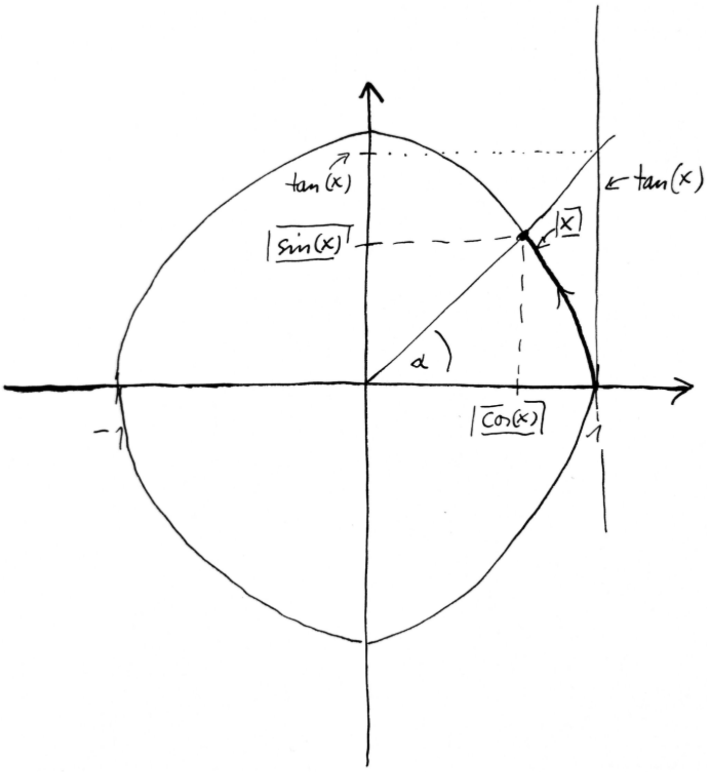


Abbildung 4.2: Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis.

Definition 4.3 (Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis)**.**
Es sei x ein beliebiger Winkel x im Bogenmaß auf dem Einheitskreis abgetragen, also $0 \leq x < 2\pi$. Dann Die Koordinaten des entsprechenden Punktes $P = P(c, s)$ auf dem Kreis geben dann

$$c = \cos(x) \quad \textit{und} \quad s = \sin(x).$$

Damit ist

$$\tan(x) = \frac{s}{c} \quad \textit{und} \quad \cot(x) = \frac{c}{s}.$$

Für Winkel $x \geq 2\pi$ werden diese mit dem eindeutig bestimmten Punkt x mod $2k\pi$ *identifiziert der in $[0, 2\pi)$ liegt. Für negative x wird der Winkel im Uhrzeigersinn abgetragen; alles weitere entsprechend.*

Bemerkung 4.2.
Wenn Sie sich die entsprechenden Dreiecke im Einheitskreis ansehen, dann sehen Sie, daß diese Definition konsistent ist mit der in Definition 4.1 gegebenen.

Übungsaufgabe 4.1.
Mit Dreiecksgeometrie kann man einige charakteristische Werte für die trigonometrischen Funktionen sin *und* cos *ausrechnen. Rechnen Sie die folgende Tabelle nach.*

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Die folgenden Eigenschaften kann man leicht nachrechnen. Sie finden einige Gedankengänge auch auf Seite 183 in [14].

Satz 4.1.
Es sei $x \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

(i) *Trigonometrischer Pythagoras:* $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

(ii) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$,

(iii) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(x)$

(iv) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,

(v) $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,

(vi) $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$,

(vii) $\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin(x)$,

(viii) $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x)$,

(ix) $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$,

(x) $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$.

Bemerkung 4.3.
Wir vereinbaren die Schreibweise

$$\sin^k(x) = (\sin(x))^k$$

und entsprechend für die anderen trigonometrischen Funktionen. Es ist Vorsicht geboten, da $\sin^{-1}$ *üblicherweise die noch einzuführenden Umkehrfunktion von* $\sin$ *bezeichnet.*

Satz 4.2.
Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $|\sin(x)| \leq 1$ *und* $|\cos(x)| \leq 1$.

(ii) Es gilt $\sin(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$ *ist.*

(iii) Es gilt $\cos(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Es gilt $\sin(x) = 1$ *genau dann, wenn* $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(v) Es gilt $\cos(x) = 1$ *genau dann, wenn* $x = 2k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(vi) Es gilt $\sin(x) = -1$ *genau dann, wenn* $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(vii) Es gilt $\cos(x) = -1$ *genau dann, wenn* $x = \pi + 2k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

Nützlich ist

Satz 4.3 (Additionstheorem)**.**
Seien $x, y \in \mathbb{R}$.
Dann gelten

(i) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

(ii) $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$,

(iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

(iv) $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.

Bemerkung 4.4.
Der vollständige Beweis der Aussagen in Satz 4.3 ist mit viel Trigonometrie Verbunden und sehr aufwendig. Wenn wir die komplexen Zahlen zur Verfügung haben (Kapitel 10) werden wir sehen, daß man Sie damit ganz einfach ausrechnen kann. Gleiches gilt für den nächsten Satz. Einiges zu den klassischen Beweisen steht in [14].

Satz 4.4.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

(i) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$,

(ii) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$,

(iii) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$,

(iv) $\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

Wie man leicht in Skizze 4.2 sieht, gilt der hilfreiche

Satz 4.5.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(x)| \le |x|$.

Die Funktionen sin und cos sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und ihr Wertebereich ist das abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$. Da sin und cos Nullstellen haben (siehe Satz 4.2), sind tan und cot nicht auf der ganzen Achse definiert. Wir setzen

$$N_c := \{x \in \mathbb{R}\colon\ \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$N_s := \{x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x) = 0\} = \{k\pi\colon\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Damit gilt $\tan\colon \mathbb{R}\backslash N_c \to \mathbb{R}$ und $\cot\colon \mathbb{R}\backslash N_s \to \mathbb{R}$.

Die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und es gilt $\tan(x) \to -\infty$ für $x \to -\frac{\pi}{2}+$ und $\tan(x) \to +\infty$ für $x \to \frac{\pi}{2}-$. Für die genauen Definitionen dieser Symbole siehe Sektion 5.1.

Die Funktionen sin: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ und cos: $[0, \pi] \to [-1, 1]$ sind streng monoton wachsen bzw. fallend. Nach Satz 1.4 existierten damit die Umkehrfunktionen und diese sind ebenfalls streng monoton wachsend bzw. fallend. Wir bezeichnen diese respektive mit

$$\text{arcsin}\colon [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \text{und} \quad \text{arccos}\colon [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Durch die Definition von tan und cot erhalten wir, daß auch diese streng monoton wachsend bzw. fallend sind. Die Umkehrfunktionen, siehe wieder Satz 1.4, sind wieder streng monoton wachsend bzw. fallend. Wir bezeichnen die Funktionen respektive mit

$$\text{arctan}\colon \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \quad \text{und} \quad \text{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

4.2 Die Exponentialfunktion

Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Für ein $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{R}$, haben wir in Kapitel 2 festgelegt, was a^x heißen soll, nämlich $a^x = \sqrt[q]{x^p}$. MAn nennt a die Basis und x den Exponenten.

Für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ müssen wir uns der Resultate aus Kapitel 3 bedienen. Wir nehmen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \to x$. Dann setzen wir

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

Eine Frage die sich sofort ergibt ist, ob diese Definition sinnvoll ist.

1. Gibt es eine solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den genannten Eigenschaften?

2. Wenn wir eine andere Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den obigen Eigenschaften wählen gilt dann

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}?$$

Die erste Frage ist leicht positiv zu beantworten. Wir benutzen Satz 2.6 und das am Anfang von Kapitel 3 beschriebene Bisektionsverfahren. Die zweite Frage ist schwieriger und kann hier ohne weitere Begriffe nicht beantwortet werden.

Die wichtigen Eigenschaften der Exponentialfunktion sind

Satz 4.6 (Eigenschaften Exponentialfunktion)**.**
Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,

(ii) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,

(iii) $a^0 = 1$,

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(v) $a^x > 0$.

(vi) *Für* $a > 1$ *ist die Funktion* $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend und für* $a < 1$ *ist die Funktion* $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ *streng monoton fallend.*

Aus dem letzten Funkt des letzten Satzes ergibt sich, mit Satz 1.4, daß die Exponentialfunktion für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$ invertierbar ist.

4.3 Übungs und Anwendungsaufgaben

Aufgabe 34

Auf dem Schirm eines Oszillographen zeichnet ein Elektronenstrahl den unten dargestellten zeitlichen Verlauf einer sinusförmigen Wechselspannung vom allgemeinen Typ

$$u(t) = u_0 \,\mathsf{sin}(\omega t + \varphi), \quad t \geq 0$$

wobei $u_0, \omega_0 > 0$ gilt.

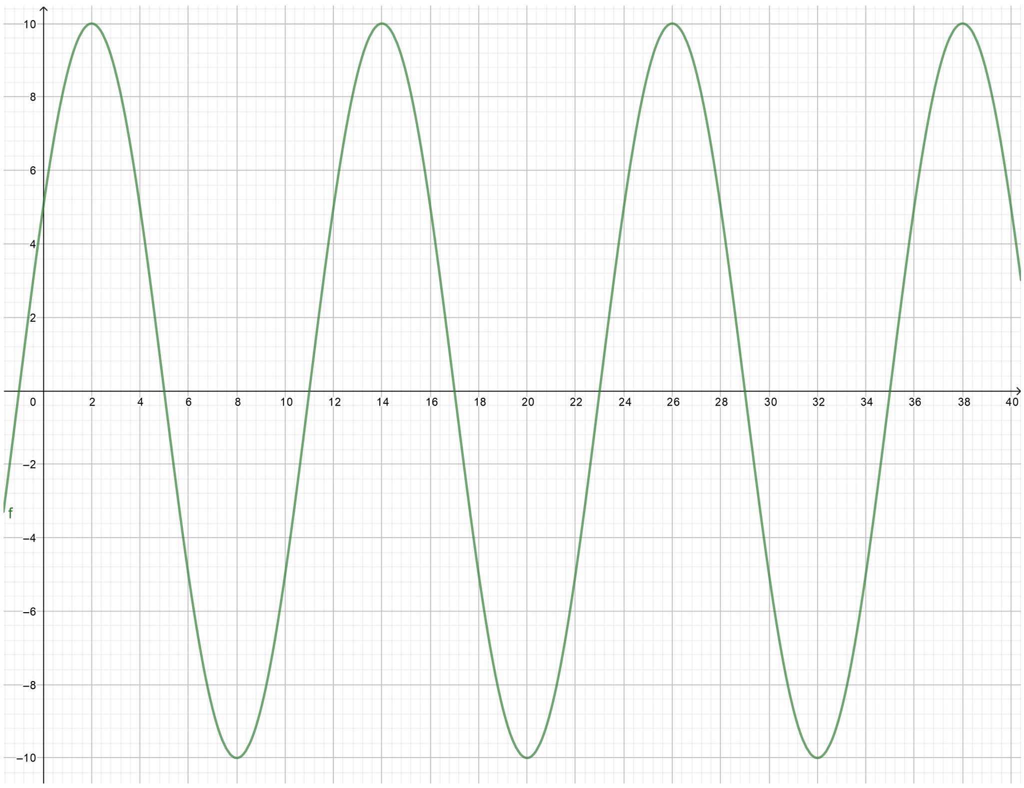


Abbildung 4.3: Die t-Achse ist in Sekunden und die u-Achse in Volt.

(i) Bestimmen Sie den Scheitelwert[1] u_0 der Kreisfrequenz ω sowie den Hauptwert[2] des Nullphasenwinkels.

(ii) Nach welcher Zeit t_1 wird zum dritten Mal der Spannungswert $u(t_1) = 8V$ erreicht?

Aufgabe 35

Ein sinusförmiger Wechselstrom

$$i(t) = i_0 \sin(t\omega), \quad t \geq 0.$$

erzeugt in einem Ohmschen Widerstand R eine momentane (zeitabhängige) Leistung nach der Gleichung

$$p(t) = R \cdot i^2(t) = R \cdot i_0^2 \cdot \sin^2(\omega t), \quad t \geq 0.$$

1. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf dieser Funktion ohne Erstellung einer Wertetabelle indem Sie den Kurvenverlauf von $p(t)$ mittels einer geeigneten trigonometrischen Umformung auf den Verlauf der als bekannt vorausgesetzten Kosinusfunktion $y_1 = \cos(2\omega t)$ zurückführen.

2. Bestimmen Sie aus den bekannten Eigenschaften dieser Kosinusfunktion sämtliche Nullstellen, relativen Extremwerte und Wendepunkte der Funktion p; siehe Kapitel 6.

[1] Als Scheitelwert bezeichnet man gemäß DIN 40110-1 ("Wechselstromgrößen") den größten Betrag der Augenblickswerte eines Wechsel-Signals.

[2] Das ist der Winkel im Intervall von 0 bis $360°$. So ist der Hauptwert von $380°$ dann $20°$.

Aufgabe 36

Durch ungestörte mechanische Überlagerung (Superposition) der beiden gleichfrequenten mechanischen Schwingungen gleicher Raumrichtung

$$y_1 = 8\text{cm} \cdot \sin\left(\pi\text{s}^{-1} \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad y_2 \quad = 10\text{cm} \cdot \sin\left(\pi\text{s}^{-1} \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

entsteht eine resultierende Schwingung der gleichen Frequenz. Bestimmen Sie die Amplitude $A > 0$ und den Phasenwinkel φ dieser in der Sinusform

$$y_1 + y_2 = A \cdot \sin\left(\pi\text{s}^{-1} \cdot t + \varphi\right)$$

darzustellenden Gesamtschwingung

(i) zeichnerisch anhand eines (reellen) Zeigerdiagramms,

(ii) durch (reelle) Rechnung.

Siehe auch Aufgabe 10.9 auf Seite 439.

5 Stetige Funktionen

Wir erinnern uns, daß es für Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ einen Unterschied zwischen f und $f(x)$ gibt. Ersteres meint die Funktion und letzteres meint den Funktionswert an der Stelle x, d.h. $f(x)$ ist eine Zahl!

Wir vereinbaren die folgenden Operationen mit Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$. Operationen die beide Funktionen betreffen sind nur auf $I \cap J$ sinnvoll. Daher werden wir von nun an annehmen, daß die Definitionsbereiche gleich sind, wenn wir Funktionen addieren oder multiplizieren wollen.
Seien also $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann setzen wir die folgenden Operationen:

- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $\alpha f\colon I \to \mathbb{R}$ punktweise durch
$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad x \in I.$$
- Die Summe zweier Funktionen ist erklärt durch
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in I.$$
- Das Produkt ist erklärt durch
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad I.$$
- Wie nicht anders zu erwarten, erklären wir auch das Reziproke punktweise. Dieses ist natürlich nur da definiert, wo die Funktion nicht verschwindet: Sei $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann
$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad x \in I$$

In vielen Büchern (für Ingenieure) wird da nicht klar unterschieden. In den meißten Fällen entsteht dadurch kein ernsthaftes Problem es ist aber mindestens ein konzeptionelles.

In diesem Skript werden wir die beiden nicht vermischen. Wir sagen, beispielsweise, f ist stetig und nicht $f(x)$ ist stetig da letzteres im wesentlichen sagt, daß eine Zahl stetig sei. Das ist, wie Sie wissen, Unsinn!

5.1 Grenzwerte von Funktionen

Wir brauchen einen weiteren Begriff für Mengen $I \subseteq \mathbb{R}$. Um Grenzwerte von Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit Hilfe von Folgen in einem Punkt x_0 definieren zu können, muß der Punkt x_0 mit einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erreichbar ist. Das besorgt

Definition 5.1 (Häufungspunkt)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nennen x_0 genau dann einen Häufungspunkt von I, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in I\backslash\{x_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x_0$ existiert.
Die Menge der Häufungspunkte von I wird mit I' bezeichnet und heißt die Ableitung von I.

Übungsaufgabe 5.1.
Bestimmen Sie die Häufungspunkte folgender Mengen:

1. $(0,1) \cup \{2 - \frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$,
2. $[0,1]$,
3. $(0,\infty)$
4. $\mathbb{Q}$.

Definition 5.2 (Grenzwert von Funktionen).
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von I. Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heißt genau dann Grenzwert von f in x_0, in Zeichen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

*wenn **für alle** Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in I\backslash\{x_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Wir schreiben auch

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} L, \quad f(x) \to L \quad \text{wenn} \quad x \to x_0.$$

Bemerkung 5.1.
Eine korrekte Definition von Grenzwerten für Funktionen ist nicht trivial. Beispielsweise, die Grenzwertdefinition in [14, S. 229] sagt, daß die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x \in (-1,1)$, $f(0) = 1$ keinen Grenzwert in $x = 0$ hat; jedenfalls wenn man es genau nimmt. (Wieso?) Das ist jedoch nicht intuitiv und wird von unserer Definition korrekt erfaßt. Der Grenzwert von f in $x_0 = 0$ ist 0.

Bemerkung 5.2.
*Fügt man in Definition 5.2 die Bedingung $x_n > x_0$ bzw. $x_n < x_0$ an die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, dann erhält man **rechts**- bzw. **links**-seitige Grenzwerte. Wir schreiben auch*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Es werden auch die Symbole

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x), \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$$

verwendet.

Aus Satz 3.5 folgt mit Definition 5.2 direkt

Satz 5.1 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von I. Weiterhin haben f und g in x_0 die Grenzwerte L bzw. M.
Dann gilt:

1. *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*
$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L + \beta M.$$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$
3. *Falls $g(x) \neq 0$ auf I und $M \neq 0$, dann*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Entsprechende Aussagen gelten für links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte. Wenn I ein abgeschlossenes oder halb-offenes Intervall ist, dann sind die Grenzwerte in den Randpunkten stets als die entsprechenden einseitigen Grenzwerte zu verstehen.

Definition 5.3 (Uneigentliche Grenzwerte)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Wir schreiben genau dann $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in I \backslash \{x_0\}$, $n \geq 1$ mit $x_n \to x_0$ folgt $f(x_n) \to \infty$ für $n \to \infty$.
Entsprechend für $f(x) \to -\infty$ für $x \to x_0$.
Analog erfolgt die Definition der entsprechenden einseitigen uneigentlichen Grenzwerte.

Bemerkung 5.3.
Natürlich benutzen wir auch wie zuvor die Symbole

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

Aus den Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen folgt

Satz 5.2 (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x), g(x) \to \pm\infty$ *für* $x \to x_0$. *Dann gilt, bei gleichem Vorzeichen:*

(i) $(f+g)(x) \to \pm\infty$ *für* $x \to x_0$.

(ii) $(fg)(x) \to \infty$ *für* $x \to x_0$.

Wenn für $h\colon I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) \to L$, $x \to x_0$ *für* $L \in \mathbb{R}$, *dann*

(i) $(f+h)(x) \to \pm\infty$ *für* $x \to x_0$.

(ii) $(fh)(x) \to \pm\infty$ *für* $x \to x_0$ *und* $L > 0$.

(iii) $(fh)(x) \to \mp\infty$ *für* $x \to x_0$ *und* $L < 0$.

Sei nun h *wie oben mit* $h(x) \to 0$, $x \to x_0$. *Dann gilt*

(i) $\frac{1}{h(x)} \to \infty$, $x \to x_0$ *wenn* $h(x) > 0$ *für alle* $x \in I$.

(ii) $\frac{1}{h(x)} \to -\infty$, $x \to x_0$ *wenn* $h(x) < 0$ *für alle* $x \in I$.

Übungsaufgabe 5.2.
Geben Sie Beispiele für alle Situationen des letzten Satzes an.

Aus dem Polizistenprinzip, Satz 3.7, ergibt sich

Satz 5.3 (Sandwich Theorem/Polizistenprinzip)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von I.
Weiter sei $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$.

(i) Es gelte

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in I \setminus \{x_0\}$$

und g, h haben in x_0 den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$.
Dann hat auch f in x_0 den Grenzwert L.

(ii) Es gelte

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in I \setminus \{x_0\}$$

und $g(x) \to 0$ für $x \to x_0$.
Dann gilt auch $f(x) \to 0$ für $x \to x_0$.

5.1.1 Bemerkungen zu topologischen Eigenschaften von Mengen

Das Fachgebiet der Topologie ist zwar interessant, hat aber für Ingenieure an dieser Stelle wenig direkte Anwendungen. Wie so oft in der Mathematik ist es aber nützlich, das Vokabular zur Verfügung zu haben. Am Anfang dieser Sektion haben wir den Begriff den Häufungspunkt eingeführt. Hier wollen wir diese Definition charakterisieren und den Begriff des inneren Punktes und des Randpunktes einführen. Diese Begriffe sind so natürlich und anschaulich wie die des Häufungspunktes.

Zuerst präzisieren wir den Begriff der (punktierten) Umgebung eines Punktes.

Definition 5.4 (Umgebung)**.**
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $r > 0$, heißt die Menge

$$U_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - x_0| < r\}$$

r-Umgebung von x_0. Die Menge

$$\begin{aligned} \dot{U}_r(x_0) &:= U_r(x_0) \backslash \{x_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon\ 0 < |x - x_0| < r\} \end{aligned}$$

heißt punktierte r-Umgebung von x_0.

Mit dem Begriff der Umgebung können wir die Definition der Konvergenz $a_n \to a$ einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt aussprechen: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{f ür alle} \quad n \geq n_0.$$

Im gleichen Geiste kann man die Aussage $f(x) \to L$, $x \to x_0$ formulieren als: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$x \in \dot{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon\left(f(x_0)\right).$$

In Definition 5.1 haben wir Häufungspunkte durch Folgen eingeführt. Man kann sich einen Häufungspunkt einer Menge als einen solchen denken, der um sich herum viele Freunde, also weitere Elemente der Menge hat. Dieses Bild wird im folgenden Satz präzisiert.

Satz 5.4.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt von I, wenn für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $\dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap I \neq \emptyset$, d.h. mindestens einen Punkt enthält.

Beweis. Wenn Sie sich fragen ob diese Aussage wirklich eines Beweises bedarf, dann haben Sie schon eine gute Intuition für diese Begriffe. Der Klarheit wegen wollen wir die beiden Richtungen dennoch durchgehen.

[$\Rightarrow$] Da x_0 ein Häufungspunkt nach Definition 5.1 ist gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen nur in $I\backslash\{x_0\}$ und $x_n \to x_0$. Nach Definition der Konvergenz gilt für jedes $\varepsilon > 0$: $\dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap I \neq \emptyset$ (es sind sogar unendlich viele Elemente enthalten).

[$\Leftarrow$] Es gelte nun, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(x_0) \cap I$ nicht leer ist. Dann konstruieren wir die benötigte Folge wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in \dot{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Für eine so gebildete Folge gilt $x_n \to x_0$ und da nach Konstruktion auch $x_n \in I\backslash\{x_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist x_0 ein Häufungspunkt nach Definition 5.1.

□

Definition 5.5 (Inneres/Randpunkte)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt genau dann innerer Punkt von I, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq I$. Die Menge aller inneren Punkte von I wird mit I° bezeichnet und das Innere von I genannt.

(ii) Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt genau dann Randpunkt von I, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap I \neq \emptyset$ und $\dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap I^c \neq \emptyset$.[a]

[a]Dabei ist I^c das Komplement von I in $\mathbb{R}$.

Aus der Definition der inneren und Randpunkte ergibt sich sofort, daß beide Häufungspunkte sind.

Definition 5.6 (Offen/abgeschlossen)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge I heißt genau dann

*(i) **offen** wenn für jedes $x \in I$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq I$.*

In anderen Worten: Die Menge I ist genau dann offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

*(ii) **abgeschlossen** wenn $I' \subseteq I$ (also I alle seine Häufungspunkte enthält)*

Bemerkung 5.4.
Trotz der Begriffsbildung offen und abgeschlossen sind die beiden Definitionen nicht gegenseitig ausschließend. Es gibt Mengen die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Im Fall von $\mathbb{R}$ gilt dies für $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ selbst. Siehe dazu auch den nächsten Satz und Übungsaufgabe 5.3.

Um uns im Umgang mit den Begriffen zu üben gleich folgenden

Hilfssatz 5.1 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen)**.**
Eine Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $I^c = \mathbb{R} \backslash I$, das Komplement von I in $\mathbb{R}$ offen ist.

Übungsaufgabe 5.3.
Zeigen Sie: Eine Menge ist genau dann offen, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist.

5.2 Das Das Epsilon-Delta–Kriterium für Grenzwerte

Es gilt

Satz 5.5 (Das $\varepsilon\delta$ – Kriterium)**.**
Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* I*. Für* $L \in \mathbb{R}$ *gilt* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *genau dann, wenn*

> *für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so daß für alle* $x \in I$ *mit* $0 < |x - x_0| < \delta$ *gilt* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Beweis. Wir beweisen beide Richtungen separat. die Hinrichtung ist etwas schwerer und nutzt Kontraposition.

$\Rightarrow$ Es ist vernünftiger hier die Kontraposition zu zeigen. Die Negation der Schlußfolgerung lautet: es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, daß für alle $\delta > 0$ ein $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ existiert mit $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Die negierte Prämisse ist, daß L nicht Grenzwert von f in x_0 ist.

Sei also $\varepsilon > 0$ wie oben. Dann wählen wir für $\delta = frac1n$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Für diese gilt $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \not\to L$. folglich ist L nicht Grenzwert von f in x_0 und der Beweis ist erbracht.

$\Leftarrow$ Es gibt also für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \in I\backslash\{x_0\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x_0$. Da die Folge konvergiert gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq n_0$. Also gilt $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit gilt $f(x_n) \to L$.

$\square$

Übungsaufgabe 5.4.

Definition 5.3 kann analog zu Satz 5.5 (bzw. Definition 3.5) als ein $\varepsilon\delta$*-Kriterium formuliert werden. Die Leserin sollte dies zur Übung tun.*

5.3 Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen

Unter Berufung auf Abschnitt 3.3, erhalten wir natürlich auch eine Definition für

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Definition 5.7 ($f(x) \to L$, $x \to \infty$).
Es sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann hat f in Unendlich genau dann einen Grenzwert, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ so existiert, daß für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in [a,\infty)$ mit $x_n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to L$. Wir schreiben dann

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

oder $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} L$ oder $f(x) \to L$ für $x \to \infty$.

Es gilt

Satz 5.6 (Charakterisierung von $f(x) \to L$, $x \to \infty$).
Es sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $C \in \mathbb{R}$ mit $C \geq a$ existiert, so daß $|f(x) - L| < \varepsilon$ für alle $x \geq C$.

Beweis. Wir beweisen die beiden Richtungen einzeln.

[$\Rightarrow$] Wir beweisen diesen Teil mittels Kontraposition. Die Negation der Schlußfolgerung ist: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß für alle $C \geq a$ ein $x \geq C$ existiert mit $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Die Negation der Prämisse ist, daß L kein Grenzwert für f in Unendlich ist.

Es sei also $\varepsilon > 0$ das oben genannte. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir für $C = n$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \geq C$ und $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Da $n \to \infty$ gilt auch $x_n \to \infty$ aber nach Konstruktion eben nicht $f(x_n) \to L$. Damit ist der Beweis erbracht.

[$\Leftarrow$] Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $C > 0$ mit $|f(x) - L| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, \infty)$, $x \geq C$. Da $x_n \to \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq C$ für $n \geq n_0$. Damit gilt $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Folglich gilt $f(x_n) \to L$.

□

Es bleibt der Leserin überlassen, den nächsten Satz im Detail zu beweisen. Man kann sich am Beweis von Satz 3.5 orientieren. Im besten Fall beweisen Sie den Satz sowohl mit Definition 5.7 als auch mit der Charakterisierung aus Satz 5.6.

Satz 5.7 (Rechenregeln)**.**
Seien $f, g\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = M$$

für $L, M \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha L + \beta M.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = LM.$$

(iii) Wenn $M \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Es gilt

Satz 5.8 (Exponentialfunktion)**.** *Sei* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Dann gilt*

(i) Für $a > 0$*:*

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \textit{und}$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

(ii) Für $a < 1$*:*

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \textit{und}$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty.$$

Der Beweis des Satzes ist nicht ganz einfach an dieser Stelle und wir wollen ihn auf später verschieben. Wir wollen den Satz an dieser Stelle nur für Beispiele zur Verfügung stellen aber nichts auf ihn gründen.

Das Symbol $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ist analog zu Folgen (Definition 3.5) definiert. Als Übung sollte sich die Leserin diese Definition überlegen und aufschreiben.

5.4 Definition Stetigkeit

Definition 5.8 (Stetigkeit von Funktionen)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und jeder Punkt von I sei ein Häufungspunkt von I. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt genau dann stetig in $x_0 \in I$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Äquivalent dazu ist, daß links und rechtsseitiger Grenzwert existieren und

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

Bemerkung 5.5.
Beachten sie, daß Stetigkeit nur in x_0 definiert ist, die Teil des Definitionsbereiches von f sind. Es hat keinen Sinn nach Stetigkeit in Punkten außerhalb des Definitionsbereiches zu fragen.

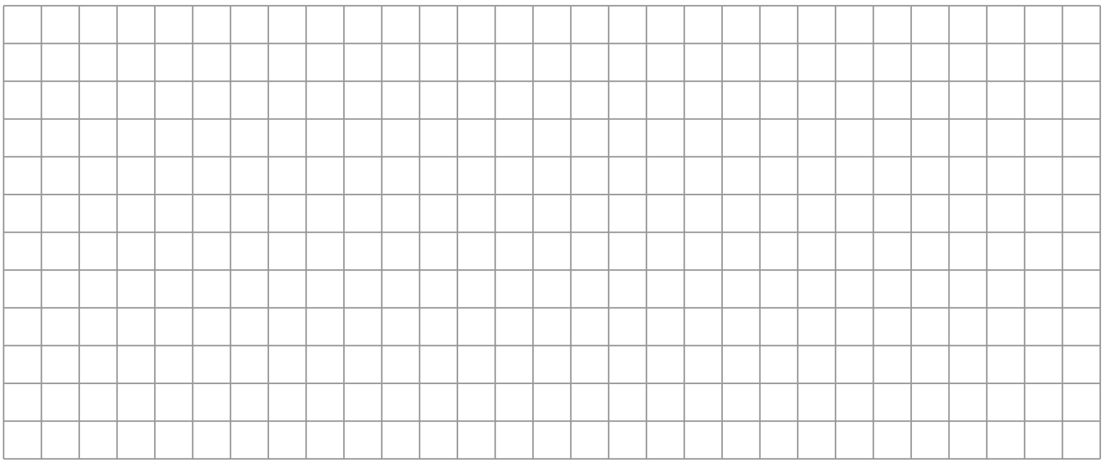


Abbildung 5.1: Stetigkeit konzeptionell.

5.5 Rechenregeln für stetige Funktionen

Aus Satz 5.1 folgt direkt

Satz 5.9 (Arithmetische Regeln für st. Funktionen)**.**
Seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ein Häufungspunkt von I und f und g seien stetig in x_0. Dann gilt:

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ stetig in x_0.

(ii) Die Funktion fg ist stetig in x_0.

(iii) Falls $g(x_0) \neq 0$, und ein $\delta > 0$ existiert mit $g(x) \neq 0$ für $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Bemerkung 5.6.
Wenn die Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ im Häufungspunkt $x_0 \in I$ stetig ist und $f(x_0) > 0$ gilt, dann existiert stets ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I$ gilt $f(x) > 0$. Die Forderung in (iii) ist also keine Forderung sondern immer erfüllt. Der Beweis ist der Leserin überlassen. (Natürlich gilt eine entsprechende Aussage für $f(x_0) < 0$.) Man sagt, daß stetige Funktionen lokal das Vorzeichen erhalten.

Sprachregelung: Wenn wir sagen, daß $f \colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann meinen wir stetig in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches nach Definition 5.8. Stetig auf I bedeutet, daß f in jedem Punkt in I stetig ist.

Schreibweise: Die Menge aller auf $I \subseteq \mathbb{R}$ stetigen Funktionen wird mit $C(I)$ bezeichnet. Wenn $I = [a, b]$, dann schreiben wir auch $C[a, b]$ anstelle von $C([a, b])$.

Außerdem gilt der wichtige

Satz 5.10 (Stetigkeit von Verkettungen)**.**
Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Es seien $f\colon I \to J$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, dann ist $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Beweis. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $I\backslash\{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$. Da f in x_0 stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

und damit, da g in $f(x_0)$ stetig ist auch

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g \circ f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) \\ &= g\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) \\ &= g(f(x_0)).\end{aligned}$$

Also ist $g \circ f$ in x_0 stetig. $\square$

5.6 Einfache Beispiele stetiger Funktionen

Beispiel 5.1.
Sei I ein Intervall. Wir diskutieren die Stetigkeit der Potenzfunktion in einigen Fällen.

(i) Die konstante Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ für ein fixes $c \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich stetig da $f(x_n) - f(x_0)$ konstant 0 ist für jede geeignete Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx$ für ein fixes $c \in \mathbb{R}$ ist auch stetig: Sei $x_0 \in I$ da für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in I\backslash\{x_0\}$ und $x_n \to x_0$ gilt

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |cx_n - cx_0| = |c||x_n - x_0|.$$

Da $x_n \to x_0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{|c|+1}$ für $n \geq n_0$. also gilt

$$n \geq n_0\colon \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Folglich $f(x_n) \to f(x_0)$.

(iii) Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig. Das folgt zum einen aus Satz 5.9 mit (ii) in diesem Beispiel und zum anderen rechnerisch: Sei $x_0 \in I$ und $(x_n)_{n\to\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$ und $x_n \in I\backslash\{x_0\}$. Dann

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x_0) &= x_n^2 - x_0^2 \\ &= (x_n - x_0)(x_n + x_0). \end{aligned}$$

Da $x_n \to x_0$ sind beide Faktoren auf der Rechten Seite konvergente Folgen. Mit $x_n - x_0 \to 0$ und $x_n + x_0 \to 2x_0$ nach Satz 3.5. Wieder durch den letzten Satz folgt dann $f(x_n) - f(x_0) \to 0$ und damit (Hilfssatz 3.4) $f(x_n) \to f(x_0)$.

Per vollständiger Induktion, die der Leserin überlassen ist, ergibt sich aus (i) und (ii) im obigen Beispiel, daß $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ auf I stetig ist. Damit haben wir den

Satz 5.11 (Polynome sind stetige Funktionen)**.**
Polynome mit reellen Koeffizienten definieren stetige Funktionen. Genauer: die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ ist stetig.

Mit Hilfe der Rechenregeln (Satz 5.9) erhalten wir natürlich sofort

Satz 5.12 (Rationale Funktionen sind stetig)**.**
Der Quotient zweier Polynome definiert eine stetige Funktion. Genauer: $f\colon \mathbb{R}\backslash N_q \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, $b_k \neq 0$ eine stetige Funktion. Dabei ist N_q die Menge

$$N_q := \{x \in \mathbb{R}\colon\ q(x) = 0\}.$$

5.7 Das Epsilon-Delta–Kriterium für Stetigkeit

Der folgende Satz charakterisiert die Stetigkeit von Funktionen. Diese Bedingung wird oft $\varepsilon\delta$–Definition der Stetigkeit genannt. Er folgt direkt aus Satz 5.5. Lesen Sie dazu auch Definition 5.9 und die folgenden Erläuterungen.

Satz 5.13 (Charakterisierung von Stetigkeit)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ ein Häufungspunkt von I. Eine Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt.

Abbildung 5.2: Stetigkeit $\varepsilon\delta$-Definition.

Beispiel 5.2.
Sei I ein Intervall. Wir diskutieren die Stetigkeit der Potenzfunktion in einigen Fällen nochmal, diesmal mit dem $\varepsilon\delta$-Kriterium.

(i) *Die konstante Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ lässt für jedes $x_0 \in I$ die Wahl jedes bel. $\delta > 0$ (also bspw. $\delta = \varepsilon$) zu, da$|f(x) - f(x_0)$ konstant 0 ist.*

(ii) *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| = |c||x - x_0|.$$

Folglich kann man das $\varepsilon\delta$-Kriterium mit der Wahl $\delta = \frac{\varepsilon}{1+|c|} > 0$ erfüllen.

(iii) *Schwieriger ist der Nachweis beispielsweise für Funktionen wie $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Mit etwas Rechnerei (und vielleicht Zeichnerei) stellt sich heraus, daß $\delta \leq \frac{|x_0|}{2}$ eine gute Wahl ist. Die Größe von δ zu beschränken macht nichts, da wir nur eines finden müssen für das die Bedingung erfüllt ist. Wir haben*

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}.$$

Aus der Definition ist klar, daß δ nicht von x abhängen darf, wir müssen es also irgendwie los werden. Wenn der Definitionsbereich in $(-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$ für ein $\alpha > 0$ enthalten wäre, dann ginge das problemlos, da $|x| \geq \alpha > 0$ gelten würde. Hier müssen wir uns weiter strecken, da der Definitionsbereich nicht von der 0 weg beschränkt ist. Das besorgt gerade die obige Wahl von δ. Natürlich ist die konkrete Wahl von $\frac{|x_0|}{2}$ etwas willkürlich aber es funktioniert *eben. Dann gilt*

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|} \\ &\leq \frac{2}{|x_0|^2}|x - x_0|\end{aligned}$$

da eben $|x| = |x_0 + x - x_0| \geq |x_0| - |x - x_0|$ *gilt (Dreiecksungleichung) und da* $|x - x_0| \leq \frac{|x_0|}{2}$ *gilt folgt* $|x| \geq \frac{|x_0|}{2}$. *Wenn wir jetzt*

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}$$

wählen, können wir die Definition erfüllen.

Die eigentliche $\varepsilon\delta$-Definition der Stetigkeit ist

Definition 5.9 (Stetigkeit)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f stetig in x_0 falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (im allg. abh. von x_0 und ε) existiert mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in I \quad \textit{mit} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Diese Definition ist leicht allgemeiner als die Definition 5.8 (und äquivalent dazu Satz 5.13). Wenn eine Funktion nach der obigen Definition in x_0 stetig ist und x_0 ein Häufungspunkt von I ist, dann sind wir in der gleichen Situation wie zuvor. Allerdings gibt es Funktionen, wie beispielsweise Folgen, die stetig nach Definition 5.9 sind aber Definition 5.8 nicht anwendbar ist.

Ein Folgenkriterium äquivalent zur obigen Definition wäre:

> f ist genau dann nach Definition 5.9 stetig, wenn:
> für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

5.8 Satz von Weierstraß

Auch die nachfolgenden Definitionen sind nichts neues. Analog zu Definition 3.3 ergeben Sie sich aus den entsprechenden Definitionen für Mengen wenn wir für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ die Menge $f(I) = \{f(x) \colon\ x \in I\}$ betrachten. Zusammengefaßt in

Definition 5.10 (Obere/Untere Schranke)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f genau dann

(i) ***nach oben beschränkt*** *falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$f(x) \leq C \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

(ii) ***nach unten beschränkt*** *falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$C \leq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

(iii) ***beschränkt*** *falls Konstanten $c, C \in \mathbb{R}$ existieren mit*

$$c \leq f(x) \leq C \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Bemerkung 5.7.
Wie zuvor ist klar, daß Beschränktheit einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ äquivalent ist zu: es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in I$.

Bemerkung 5.8.
Wie schon mehrfach erwähnt, kommen Funktionen stets mit einem Definitionsbereich. Es hat keinen Sinn zu sagen, daß eine Funktion beschränkt oder unbeschränkt ist, wenn man den Definitionsbereich nicht mit angibt. Beispielsweise ist für $I \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ beschränkt für $I = [0, 1]$, nach unten beschränkt für $I = [0, \infty)$.

Für die Begriffe Supremum und Infimum einer Funktion gilt die gleiche Bemerkung wie wir sie vor der Definition der oberen und unteren Schranke gemacht haben.

Definition 5.11 (Supremum/Infimum)**.**
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ heißt genau dann das Supremum von f, wenn S eine obere Schranke von f ist und für jede obere Schranke U von f gilt $S \leq U$.

(ii) Eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ heißt genau dann das Infimum von f, wenn I eine untere Schranke von f ist und für jede untere Schranke L von f gilt $L \leq I$.

Beispiel 5.3.
Sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Dann ist 0 das Infimum von f und 1 das Supremum. Natürlich ist jede Zahl $L \in (-\infty, 0]$ eine untere Schranke für f und jede Zahl $U \in [1, \infty)$ ist eine obere Schranke von f.
Wir weisen darauf hin, daß diese Funktion kein Maximum oder Minimum hat. Diese Begriffe werden in der nächsten Definition präzisiert.

Weiter präzisieren wir die Begriffe globales Minimum und Maximum. Wir bemerken, daß, wenn wir das Wort **global** benutzen, es wahrscheinlich auch lokale gibt. Dazu kommen wir im Kapitel zu Ableitungen.

Definition 5.12 (Globale Extrema)**.**
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

1. *Wir sagen die Funktion hat an der Stelle x_0 ein* ***globales Minimum*** *genau dann, wenn*

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt dann ein globales Minimum von f.

2. *Wir sagen die Funktion hat an der Stelle x_0 ein* ***globales Maximum*** *genau dann, wenn*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt dann ein globales Maximum von f.

Wenn eine Funktion in einem Punkt x_0 ein Maximum oder Minimum besitzt, dann sprechen wir bei $(x_, f(x_0))$ von einem Extremum.

Betrachte $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Es ist klar, dass die Funktion beschränkt ist und, daß sie ihr globales Maximum annimmt, d.h. es gibt ein $x^* \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$f(x^*) = \sup_{x \in \{1, \dots, n\}} f(x).$$

Für stetige Funktionen auf Intervallen der Form $[a, b]$ (oder Vereinigungen davon) gibt es ein Analogon zu dieser Aussage für stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen.

Satz 5.14 (Weierstraß)**.**
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$. *Dann gelten:*

(i) f *ist beschränkt.*

(ii) es existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$ *mit*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Beweis. Wir werden beide Eigenschaften mit einem Widerspruchsbeweis zeigen. Bevor Sie die Argumente lesen, sollten Sie selbst versuchen den Beweis zu führen.

(i) Angenommen, die Funktion ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) > n$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $a \leq x_n \leq b$ beschränkt ist, existiert nach Satz 3.12 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x_0 \in [a,b]$. Da aber $f(x_n) \to +\infty$ gilt, kann

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

nicht gelten. Das ist unser gesuchter Widerspruch, da die Funktion stetig vorausgesetzt ist. Der Beweis für die Beschränktheit nach unten erfolgt in gleicher Weise. (Führen Sie die entsprechenden Schritte aus!)

(ii) Angenommen, es existiert kein $x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Sei $y_2 = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ und definiere

$$F(x) = \frac{1}{y_2 - f(x)}.$$

Nach unserer Annahme ist F nach Satz 5.9 stetig auf $[a,b]$. Nach dem ersten Punkt dieses Satzes ist F beschränkt. Es gilt also

$$\frac{1}{y_2 - f(x)} \leq M \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

für ein hinreichend groß es $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Damit

$$f(x) \leq y_2 - \frac{1}{M} \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dies widerspricht jedoch der Definition von y_2. Damit ist der Beweis abgeschlossen. Für das Infimum erfolgt der Beweis analog. (Führen Sie die entsprechenden Schritte aus!)

$\square$

5.9 Der Zwischenwertsatz

Satz 5.15 (Zwischenwertsatz).
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Aus dem Zwischenwertsatz erhalten wir

Folgerung 5.1.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$$

für $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots 2n+1$ mit $a_{2n+1} \neq 0$, hat eine reelle Nullstelle.

Beweis. Es genügt die Aussage für $a_{1n+1} > 0$ zu zeigen. Sei $M > 0$. Wir wollen nun bestimmen, wie groß man M wählen muß um $f(M) > 0$ und $f(-M) < 0$ zu erhalten. Das f stetig ist, wissen wir aus Satz 5.11. Nach der Dreiecksungleichung haben wir für $M \geq 1$:

$$\left| \sum_{k=0}^{2n} a_k M^k \right| \leq \underbrace{2n \max_{k=0}^{2n} |a_k|}_{=:A} M^{2n}.$$

Damit

$$\begin{aligned} f(M) &= a_{2n+1} M^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} a_k M^k \\ &\geq a_{2n+1} M^{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n} |a_k| M^k \\ &\geq \frac{a_{2n+1}}{2} M^{2n+1} + \frac{a_{2n+1}}{2} M^{2n+1} - A M^{2n} \end{aligned}$$

Um $\frac{a_{2n+1}}{2} M^{2n+1} - AM^{2n} \geq 0$ zu bekommen, müssen wir $M \geq \max\{\frac{2A}{a_{2n+1}}, 1\}$ wählen. Dann gilt

$$f(M) \geq \frac{a_{2n+1}}{2} M^{2n+1} > 0.$$

Nun müssen wir noch $f(M) < 0$ sicherstellen:

$$\begin{aligned} f(-M) &= -a_{2n+1}M^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} a_k(-M)^k \\ &\leq -a_{2n+1}M^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} |a_k|M^k \\ &\leq -\frac{a_{2n+1}}{2}M^{2n+1} + AM^{2n} - \frac{a_{2n+1}}{2}M^{2n+1}. \end{aligned}$$

Um nun $AM^{2n} - \frac{a_{2n+1}}{2}M^{2n+1} \leq 0$ zu bekommen, brauchen wir $M \geq \frac{2A}{a_{2n+1}}$. Damit ist dies mit unserer Wahl schon garantiert und wir erhalten

$$f(-M) \leq -\frac{a_{2n+1}}{2}M^{2n+1} < 0.$$

Nun folgt die Aussage mit dem Mittelwertsatz. □

Natürliche gilt die Beobachtung der letzten Folgerung nicht nur für Polynome.

Folgerung 5.2 (Nullstellensatz)**.**
Sei (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein Intervall und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \mp\infty$$

gilt, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Folgerung 5.3.
Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existiert zu jedem $y_0 \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $[f(b), f(a)]$) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Folgerung 5.4 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.**
Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ *stetig.*
Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ *mit* $f(x_0) = x_0$.

5.10 Monotonie und Stetigkeit

Satz 5.16 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine (stetige) streng monoton wachsende/fallende Funktion. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \to I$ die auch streng monoton wachsend/fallend und stetig ist.

Beweis. Wir werden für den Beweis annehmen, daß f strikt monoton wachsend ist. Der Fall strikt monoton fallend folgt auf ähnliche Weise und ist der Leserin überlassen. Nach Satz 1.4 existiert f^{-1} und ist ebenfalls streng monoton wachsend. Es sei $b \in f(I)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $a = f^{-1}(b)$. Wir zeigen nun, daß es ein $\delta > 0$ gibt mit $|f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$ für alle $y \in f(I)$ mit $|y - b| < \delta$. Wir werden annehmen, daß a kein Endpunkt des Intervalls I ist. Es bleibt der Leserin überlassen, den Beweis an den Fall anzupassen.
Wir können nun annehmen, daß $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subseteq I$ da wir sonst ein kleineres $\varepsilon > 0$ wählen können. Wir setzen $c = f(a - \varepsilon)$ und $d = f(x + \varepsilon)$. Da f streng monoton wachsend ist, gilt dann $c < b < d$. Sei nun $\delta \leq \min\{b - c, d - b\}$. Dann gilt $c \leq b - \delta$ und $b + \delta \leq d$. Damit gilt dann für $y \in f(I)$ mit $|y - b| < \delta$ auch $c < y < d$. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, gilt dann auch $f^{-1}(c) < f^{-1}(y) < f^{-1}(d)$. Dies aber heißt $|f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$. Damit ist f^{-1} stetig in b und, da $b \in f(I)$ beliebig war, stetig auf $f(I)$. $\square$

Bemerkung 5.9.
Wie die Leserin bemerkt hat, benutzen wir an keiner Stelle, daß f stetig ist. In der Tat gibt es Beispiele für diesen Satz mit unstetigem f:

$$\begin{cases} f & : & [0,1] \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & : & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x + 1 & : & x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Satz 5.17.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.

Der Beweis dieses Satzes steht hier nur für die (sehr) interessierte Leserin. Er ist ziemlich technisch und nicht besonders lehrreich. Es ist erstaunlich, daß eine so Einsichtige Aussage wie die von Satz 5.17 so schwer zu beweisen ist.

Beweis. Wenn f streng monoton ist, dann ist es injektiv nach Satz 1.4. Es bleibt also zu zeigen, daß eine stetige injektive Funktion streng monoton sein muß. Seien nun $x_1, x_2 \in I$ keine Randpunkte und $x_1 < x_2$. Dann gilt entweder $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_2) < f(x_1)$.
Wir zeigen, daß f streng monoton wachsend ist. Seien $a < x_1' < x_2' < b$ beliebig. Wir setzen dann $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = tx_1' + (1-t)x_1$ und $y(t) = tx_2' + (1-t)x_2$. Es gilt nun $a < x(t) < y(t) < b$ für $t \in [0,1]$. Die Funktionen x und y sind stetig und damit ist auch die Verkettung $g(t) = f(y(t)) - f(x(t))$ stetig auf $[0,1]$. Da f injektiv ist, kann g nie verschwinden und damit auch nicht negativ nach dem Zwischenwertsatz. Da $g(0) = f(x_2) - f(x_1) > 0$ und $g(t) > 0$ für alle $t \in [0,1]$ folgt $g(1) = f(x_2') - f(x_1') > 0$. Der zweite Fall folgt dann in gleicher Weise. □

5.11 Weitere stetige Funktionen

Es gilt

Satz 5.18 (Trigonometrische Funktionen)**.**
Die Funktionen $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig auf ganz* $\mathbb{R}$. *Weiterhin sind deren Umkehrfunktionen* $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *und* $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ *stetig auf Ihrem Definitionsbereich.*

Bemerkung 5.10.
Die Funktionen $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *und* $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ *sind nach dem letzten Satz auch stetig auf Ihrem Definitionsbereich und wie in den Bemerkungen zum Beweis des letzten Satzes (siehe Satz Satz 5.16) gilt dies auch für deren Umkehrfunktionen* $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *und* $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für sin, die für cos folgt in ähnlicher Weise und ist der Leserin als Übungsaufgaben überlassen. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt schon aus Satz 5.16.
Wir erbringen den Beweis mit dem $\varepsilon\delta$-Kriterium. Ausführungen zu einem Beweis mit Folgen kann in [14] in Sektion 6.2 gefunden werden. Wir wollen also $|\sin(x+h)-\sin(x)|$ kontrollieren. Dazu benutzen wir das Additionstheorem 4.3:

$$\begin{aligned}|\sin(x+h)-\sin(x)| &= |\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(h)|\\ &= |\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)\cos(0)|\\ &= |\sin(x)(\cos(h)-1)+\sin(h)\cos(x)|.\end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Dreiecksungleichung und den Fakt $|\cos(x)| \le 1$, $|\sin(x)| \le 1$ (Satz 4.2):

$$|\sin(x)(\cos(h)-1)+\sin(h)\cos(x)| \le |\cos(h)-1| + |\sin(h)|.$$

Damit ist die Stetigkeit von sin an der Stelle x zu den folgenden beiden Aussagen reduziert:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \quad \text{und}$$
$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1.$$

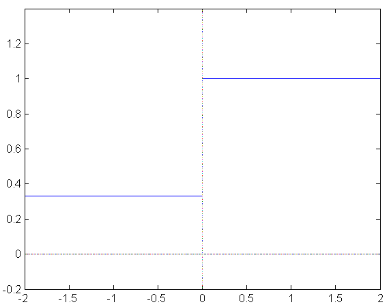
Die erste ist Stetigkeit von sin in 0 und die zweite Stetigkeit von cos in 0. Die erste Aussage folgt aus $0 \leq |\sin(h)| \leq |h|$ (Polizistenprinzip, Satz 4.5). Es bleibt also noch die zweite zu zeigen: Mit dem trig. Pythagoras (Satz 4.2) haben wir $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Damit folgt die Aussage, da die Funktion $x \mapsto x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist mit $\sin(x) \to 0$, $x \to 0$ und den Grenzwertregeln. (Satz 5.1). $\square$

Übungsaufgabe 5.5.
Schreiben Sie unter Verwendung der oben vorgebrachten Argumente einen vollständigen und gt lesbaren $\varepsilon\delta$-Beweis der Stetigkeit von sin *an der Stelle* $x \in \mathbb{R}$.

5.12 Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen

Die Definition der Unstetigkeit ergibt sich durch die Negation der Definition der Stetigkeit. Wir schreiben die beiden Möglichkeiten aus: Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \in I$ Häufungspunkt von I. Dann gilt:

> f ist genau dann nicht stetig (unstetig) in x_0, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Gliedern in $I\backslash\{x_0\}$ und $x_n \to x_0$ existiert für die $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert.



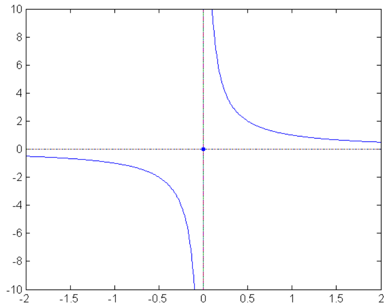


Abbildung 5.3: Darstellung einer Spring- (links) bzw. Polstelle (rechts) einer Funktion.

Definition 5.13 (Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Sei f in x_0 unstetig. Dann haben wir die folgende Klassifizierung:

1) *Wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert, dann hat f eine **hebbare Unstetigkeitsstelle** in x_0.*

2) *Wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht existiert aber $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existieren, dann hat f eine **Unstetigkeitsstelle 1. Art** oder eine **Sprungstelle** in x_0, .*

3) *Wenn wenigstens einer der Grenzwerte* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ *oder* $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ *nicht existiert, dann hat* f *eine* ***Unstetigkeitsstelle 2. Art****.*

5.13 Kompakte Mengen und Stetigkeit

Definition 5.14 (Kompakte Menge)**.**
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

*(i) Die Menge K heißt genau dann **abgeschlossen**, wenn alle Häufungspunkte von K Elemente von K sind.*

*(ii) Die Menge K heißt genau dann **kompakt**, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Die Eigenschaft, daß die Menge abgeschlossen und beschränkt ist, nennt man auch Heine-Borel Eigenschaft.

Nach dieser Definition sind insbesondere Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ der Form $I = [a, b]$ kompakt da sie beschränkt und abgeschlossen sind.

Es gibt folgende Charakterisierung kompakter Mengen:

Satz 5.19.
Eine Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn aus jeder Familie $\{O_i\colon\ i \in I\}$ offener Mengen mit $I \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ eine endliche Familie $\{O_i\colon\ i \in \{1, \dots, n\}$ mit $I \subseteq O_1 \cup \dots \cup I_n$ ausgewählt werden kann.

Aus der Charakterisierung ergibt sich sofort

Folgerung 5.5.
Seien $K_1, \dots, K_n \subseteq \mathbb{R}$ kompakt Mengen. Dann ist

$$K_1 \cup \dots \cup K_n$$

auch kompakt.

Bemerkung 5.11.
Wie wir schon mit dem Satz von Weierstraß gesehen haben sind kompakte Mengen in gewisser Weise Verallgemeinerungen von endlichen Mengen. Siehe Sektion 5.8.

Bemerkung 5.12.
In allgemeineren Situationen ist die Aussage von Satz 5.19 die Definition kompakter Mengen und Definition 5.14 wird dann ein Satz für $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Dieser Satz heißt in der Literatur der Satz von Heine-Borel.

Definition 5.15 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f genau dann gleichmäßig stetig auf I, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$x, y \in I,\, |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

existiert.

Übungsaufgabe 5.6.
Interpretieren Sie gleichmäßige Stetigkeit graphisch. Was ist der Unterschied zur Stetigkeit. Geben Sie intuitive graphische Beispiele für glm. stetige und nicht glm. stetige Funktionen an.

Wir haben folgenden wichtigen

Satz 5.20 (Heine)**.**
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beispiel 5.4.
Wir illustrieren den Satz an einem Beispiel. Wir betrachten $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Als erstes zeigen wir, daß, f stetig ist. Sei $x_0 \in [a,b]$. Wir haben dann

$$|f(x) - f(x_0)| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x + x_0||x - x_0|.$$

Wir haben $|x + x_0| \leq |x| + |x_0|$. Da das Intervall $[a,b]$ insbesondere beschränkt ist, gilt $|x + x_0| \leq |x| + |x_0| \leq 2|b - a|$. Damit können wir

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$$

wählen. Da dieses δ nicht von x_0 abhängt gilt: für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq |x + y||x - y| < \underbrace{\frac{|x+y|}{2|b-a|}}_{\leq 1} \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, daß f auf einem bel. kompakten Intervall glm. stetig ist. Die Leserin ist gut beraten, die Rechnung anhand konkreter Intervalle wie $[-3, 1]$ und $[0, 2]$ nochmals nachzuvollziehen.

Übungsaufgabe 5.7.
Zeigen Sie, daß $f\colon [\frac{1}{2}, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Die wichtigste Folgerung für uns ist, daß eine stetige Funktion beliebig genau durch eine stückweise konstante Funktion, eine sogenannte **Treppenfunktion** (siehe Definition 8.1) angenähert werden kann.

Etwas genauer: Sei $t\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

und Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$ existiert mit $t(x) = c_i$ für alle $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$ dann heißt t eine Treppenfunktion.

Satz 5.21 (Approximation stetiger Funktionen)**.**
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $t\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - t(x)| < \varepsilon.$$

Beweis. Der Beweis ist vollständig konstruktiv wenn wir den Fakt hinnehmen, daß stetige Funktionen auf Kompakta glm. stetig sind: Da $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ als stetig vorausgesetzt und $[a,b]$ nach den obigen Aussagen kompakt ist, ist f glm. stetig. Sei nun ein $\varepsilon > 0$ (zur Approximation) beliebig klein vorgegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$x, y \in I,\ |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen

$$N = \left\lceil \frac{2|b-a|}{\delta} \right\rceil$$

um das Intervall $[a,b]$ in N Intervalle der Länge $\approx \frac{\delta}{2}$ einzuteilen. Wir definieren dann die Partition zu unserer Treppenfunktion als

$$x_n = a + n\frac{|b-a|}{N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Wir setzen dann

$$t(x) = f(x_i) \quad \text{für alle} \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \quad \text{und} \quad t(x_i) = f(x_i)$$

für alle $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Als Bemerkung: Wollte man eine Funktion t die $t \geq f$ erfüllte, so sollte man die c_i als $\sup\limits_{x \in (x_i, x_{i+1})} f(x)$ wählen und wenn man $t \leq f$ erreichen will, dann sollte man die c_i als $\inf\limits_{x \in (x_i, x_{i+1})} f(x)$ wählen. Weiter im Text: Wir haben noch zu zeigen, daß gilt $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - t(x)| < \varepsilon$. Sei $x \in [a, b]$ beliebig. Wenn $x = x_i$ für ein $i = 1, \dots, N$, dann gilt $|f(x_i) - t(x_i)| = 0$. Andernfalls existiert ein $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ mit $x \in (x_i, x_{i+1})$. Dann gilt $|f(x) - t(x)| = |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ da $|x - x_i| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. Damit gilt

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - t(x)| < \varepsilon$$

und der Beweis ist erbracht. □

Wir wollen unser Verständnis des obigen Beweises an einem Beispiel weiter vertiefen: Betrachten wir $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Wir wollen sehen, daß wir eine Treppenfunktion finden können, die f mit einem Fehler kleiner $\varepsilon = \frac{1}{10}$ approximiert. Nach unserer Rechnung in Beispiel 5.4 haben wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2|b-a|} = \frac{1}{20}$. Es würde also ausreichen, das Intervall $[0, 1]$ in 21 Teile aufzuteilen (Wieso?) und wir wollen das tun um die Rechnungen nicht unnötig zu verkomplizieren. Wir definieren

$$x_i = \frac{n}{21}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 21$$

und damit

$$t(x) = \frac{i^2}{441} \quad \text{für} \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \tag{5.13.1}$$

für $i = 0, 1, 2, \dots, 20$ und $t(x_i) = \frac{i^2}{441}$ für $i = 0, 1, 2, \dots, 21$.

5.14 Exkurs: Intervallhalbierungsverfahren

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) < 0$ (verschiedenes Vorzeichen). Nach dem Nullstellensatz gibt es in (a, b) eine Nullstelle z von f.

Algorithmus:

Setze $a_1 = a$ und $b_1 = b$.
Für $n = 1, 2, ...$
    $h = (a_n + b_n)/2$.
    Ist $f(h) = 0$, so haben wir eine Nullstelle von f gefunden.
    Ist $f(h)f(a_n) > 0$, setze $a_{n+1} = h$, $b_{n+1} = b_n$.
    Ist $f(h)f(a_n) < 0$, setze $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = h$.

Die entstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert z, der eine Nullstelle von f ist.

Übungsaufgabe 5.8.
Überlegen Sie sich, warum das so ist. Siehe auch Abschnitt 3.15.

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $-x = e^x$, d.h. eine Nullstelle von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Die Funktion f ist stetig. Eine Lösung durch Umstellen nach x ist hier unmöglich. Wir verwenden das Intervallhalbierungsverfahren.

Da $f(0) = 1$ und $f(-1) = -0.6321\ldots$, können wir (Zwischenwertsatz) mit $a = -1$ und $b = 0$ starten. Natürlich wird man das Verfahren auf einem Rechner implementieren.

Ergebnisse:

n	a_n	b_n	$b_n - a_n$
1	-1	0	1
2	-1	-0.5	$\frac{1}{2} = 0.5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	$-0.56738281\ldots$	-0.56640625	$\frac{1}{2^{10}} \approx 9.77 \cdot 10^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
21	$-0.56714344\ldots$	$-0.56714248\ldots$	$\frac{1}{2^{20}} \approx 9.54 \cdot 10^{-7}$

5.15 Übungsaufgaben

Aufgabe 37

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}, & \text{für } |x| \neq 1; \\ 0, & \text{für } |x| = 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie, sofern existent, die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1+} f(x), \quad \lim_{x\to 1-} f(x), \quad \lim_{x\to 1} f(x), \quad \lim_{x\to -1+} f(x), \quad \lim_{x\to -1-} f(x), \quad \lim_{x\to -1} f(x).$$

Was lässt sich damit über die Stetigkeit von f sagen?

Aufgabe 38

In welchen Punkten sind folgende Funktionen stetig? Untersuchen Sie insbesondere die Grenzwerte für $x \to 0$ und $x \to 1$ und skizzieren Sie auch die zugehörigen Graphen.

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{für } x > 1. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0; \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{für } x > 1. \end{cases}$,

Aufgabe 39

Wie müssen die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \alpha \sin x + \beta, & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

überall stetig ist?

6 Differenzialrechnung

Wenn nichts weiter gesagt wird, werden wir in diesem Kapitel stets annehmen, daß $I \subseteq \mathbb{R}$ (und manchmal $J \subseteq \mathbb{R}$ je) ein Intervall bezeichnet. Wenn es wichtig ist, dann werden wir die Art des Intervalls spezifizieren.

6.1 Einführung – Geometrische Interpretation der Ableitung

Wir betrachten den Graph einer schönen, d.h. hinreichend glatten, Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, beispielsweise ein Polynom. Wir stellen uns die Aufgabe eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ zu finden. Wie Sie aus der Schule wissen starten wir mit einer Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$, $x_1 = x_0 + h$. Der Anstieg der Sekante ergibt sich zu

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_1 \neq x_0$$

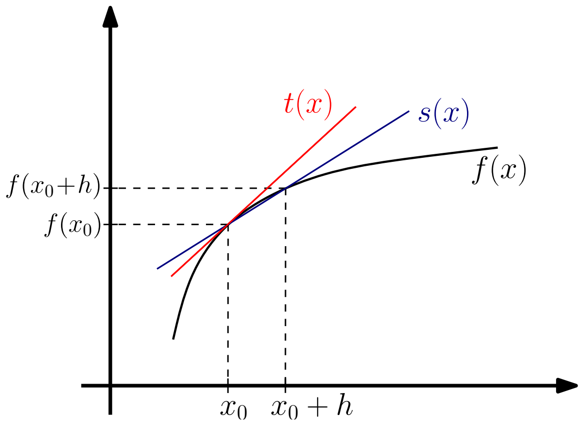
und damit erhalten wir als Sekantengleichung

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0), \quad x_1 \neq x_0, \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0). \end{aligned}$$

Da wir wissen, was es bedeutet Grenzwerte von Funktionen zu bestimmen, können wir unter Verwendung von Satz 5.1 untersuchen, was mit s passiert, wenn $x_1 \to x_0$. Wir sehen, daß das Kriterium für die Existenz einer Tangente die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ist. Diese Beobachtung werden wir zur Definition von Differenzierbarkeit im Punkt x_0 machen.



$$s(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}(x-x_0)$$

$$\Big\downarrow h \to 0$$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Abbildung 6.1: Darstellung der Sekante und Tangente

6.2 Definition Differenzierbarkeit

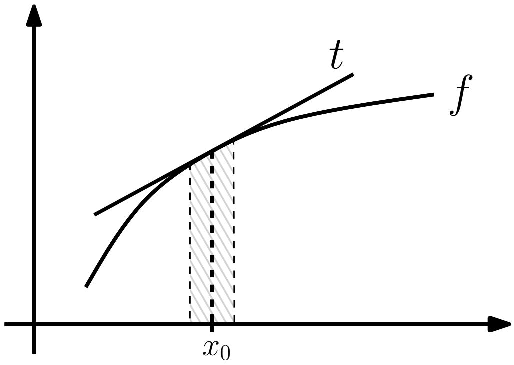


Abbildung 6.2: Die Idee der Ableitung als lineare Approximation der Funktion f in einer Umgebung des Punktes x_0.

Definition 6.1 (Differenzierbarkeit).
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt genau dann in $x_0 \in I^\circ$ differenzierbar, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Wenn das Intervall $J \subseteq I$ alle Punkte enthält in denen die Funktion f differenzierbar ist, dann heißt die Funktion $f'\colon J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ Ableitung von f.
Für $x \neq x_0$ heißt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Differentialquotient; letzterer wird auch mit $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bezeichnet.

Sprachregelung: Wir sagen f ist differenzierbar, wenn f in jedem Punkt seines Definitionsbereiches I differenzierbar ist. Wenn x_0 ein Randpunkt des Intervalls ist, dann ist der Grenzwert im Differentialquotienten als entsprechend einseitiger Grenzwert zu verstehen, d.h. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar heißt, daß f auf (a,b) differenzierbar ist und daßdie Grenzwerte

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

existieren.
Allgemein führen wir für die recht- bzw. linksseitige Ableitung folgende Schreibweisen ein:

$$f'(x_0+) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{6.2.1}$$

$$f'(x_0-) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{6.2.2}$$

Diese können natürlich existieren ohne daß $f'(x_0)$ existieren muß. Mit der Vereinbarungen aus den Sektionen über Grenzwerte für Funktionen gilt jedoch, daß $f'(x_0)$ genau dann existiert, wenn $f'(x_0+)$ und $f'(x_0-)$ existieren und $f'(x_0+) = f'(x_0-)$.

Bemerkung 6.1.
Wie für die obigen Grenzwerte kann man die Begriffe links- ((6.2.2)) und rechtsseitige ((6.2.1)) Ableitung einführen und Differenzierbarkeit durch die Existenz und Gleichheit der links- und rechtsseitigen Ableitungen definieren.

Der folgende Satz gibt eine (analytische) Umformulierung von Definition 6.1

Satz 6.1.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I^\circ$. Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine in x_0 stetige Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$$

für alle $x \in I$. Dann gilt $\varphi(x_0) = f'(x_0)$

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen einzeln.

[⇒] Es gilt für $x \in I$ mit $x \neq x_0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

Da f differenzierbar ist können wir setzen

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & : \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & : \quad x = x_0 \end{cases}.$$

Nach Definition ist φ stetig in x_0 und die Aussage ist gezeigt.

[⇐] Angenommen es gilt

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$$

mit den angegebenen Eigenschaften. Dann gilt für $x \in I$ mit $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x).$$

Da φ in x_0 stetig ist, können wir den Grenzwert auf beiden Seiten nehmen und erhalten $f'(x_0) = \varphi(x_0)$. Damit ist f in x_0 differenzierbar und auch diese Aussage erledigt.

□

6.3 Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Satz 6.2 (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f stetig in x_0.

Beweis. Es gilt für $x \in I$ mit $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

und $\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$ gilt, folgt nach Satz 5.1, daß

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

□

Bemerkung 6.2.
Ein häufiger Fehler von Studierenden ist, daß die Ableitung einer differenzierbaren Funktion als stetig angenommen wird. Eine differenzierbare Funktion f muß, wie oben gesagt, stetig sein, die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muß jedoch keineswegs stetig sein auch wenn $J = I$ gilt. Hier ein Beispiel: das Sinus und Cosinus differenzierbare Funktionen sind, wollen wir für den Moment als bekannt voraussetzen ebenso wie die Kettenregel. Wir betrachten

$$f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^{1+\varepsilon} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : \; x \neq 0 \\ 0 & : \; x = 0 \end{cases} .$$

Bemerkung 6.3.
Die Stetigkeit von f im Punkt x_0 folgt aus der in Satz 6.1 gegebenen Umformulierung durch die Stetigkeit von φ in x_0 aus der Formel

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0).$$

Die Umkehrung des letzten Satzes gilt nicht wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.1.
Nach Hilfssatz 3.6 ist die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Wie man leicht sieht (achso?) ist $|\cdot|$ für $x \neq 0$ auch differenzierbar. Bleibt also der Fall $x = 0$. Wir haben für $x \neq_0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Es ist nun klar, daß der Grenzwert nicht existiert da beispielsweise

$$\frac{|(-1)^n \frac{1}{n}|}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n$$

nicht konvergiert für $n \to \infty$. Es gilt $f(0+) = 1$ und $f'(0-) = -1$; die rechts- und linksseitigen Ableitungen existieren, sind aber nicht gleich.

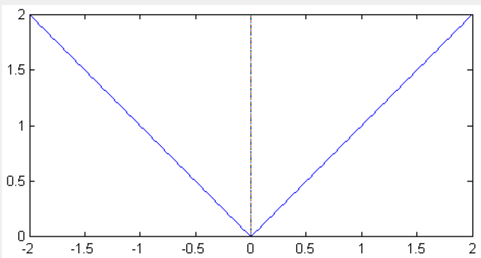


Abbildung 6.3: Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$.

Übungsaufgabe 6.1.
Führen Sie weitere Details in dem obigen Beispiel aus.

6.4 Einfache Beispiele differenzierbarer Funktionen

Beispiel 6.2.
Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ für $c \in \mathbb{R}$ fix ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ für $x \in I$. Die Ableitung ist auf ganz I definiert und ist die Funktion identisch 0.

Beispiel 6.3.
Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist differenzierbar. Wir haben

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \quad x \neq x_0$$

Wenn wir auf beiden Seiten den Grenzwert $x \to x_0$ nehmen, dann erhalten wir $f'(x_0) = 1$ für alle $x_0 \in I$. Folglich ist die Ableitung von $f(x) = x$ auf ganz I definiert und die konstante Funktion $f'(x) = 1$ für $x \in I$.

Beispiel 6.4.
Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist differenzierbar. Wir haben für $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= x + x_0.\end{aligned}$$

Wenn wir auf beiden Seiten den Grenzwert bilden, dann erhalten wir mit unseren Rechenregeln, $f'(x_0) = 2x_0$ für alle $x_0 \in I$.

6.5 Analytische Interpretation der Ableitung

Die hier gegebene Interpretation der Ableitung hat natürlich mit der geometrischen zu tun. Die geometrische Einführung macht es plausibel, daß die Tangente um den Punkt x_0 herum eine gute Approximation der Funktion f darstellt. Dies wird durch die nachfolgenden Betrachtungen präzisiert.

Satz 6.3 (Linearisierung/Weierstraß-Formel)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I^\circ$. Dann ist f in x_0 genau dann differenzierbar, wenn ein $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

und

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)$$

für alle $x \in I$ und ein $A \in \mathbb{R}$. In dem Fall gilt $f'(x_0) = A$. Die lineare Funktion T_{f,x_0}, gegeben durch

$$T_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

heißt Linearisierung von f um x_0.

Beispiel 6.5.
Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ haben wir

$$f(x) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + \varphi(x), \quad \varphi(x) = (x - x_0)^2.$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte für stetige Funktionen gilt auch $\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = x - x_0 \to 0$ für $x \to x_0$.

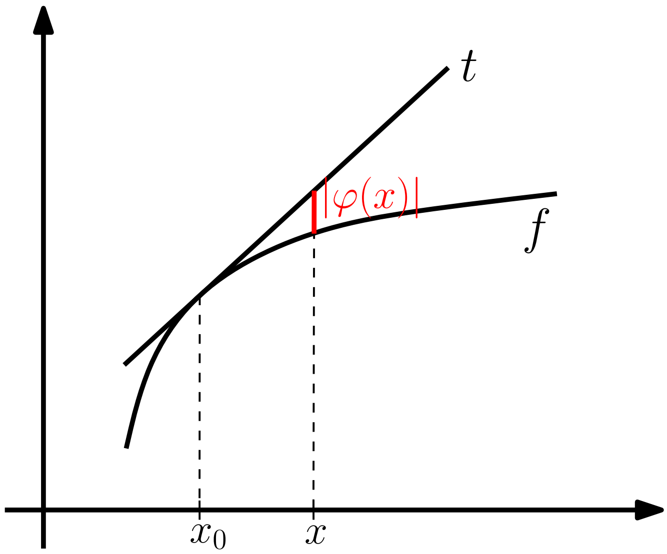


Abbildung 6.4: Bildliche Darstellung der Situation in Satz 6.3.

Beweis. Wir zeigen nochmals beide Richtungen. Man könnte diesen Satz zusammen mit Satz 6.1 etwas ökonomischer zeigen aber wir wollen hier das Argumentieren üben.

[⇒] Wir nehmen ein bel. $x \in I$ und berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \\ &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

für $x \in I$. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

wobei wir die Rechenregeln für Grenzwerte verwendet haben.

[⇐] Wir nehmen nun an, daß φ wie angegeben existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x).$$

Dann haben wir für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{\varphi(x)}{x - x_0}.$$

Folglich existiert der Grenzwert links für $x \to x_0$ und es gilt $f'(x_0) = A$.

□

6.6 Das Differential

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I^\circ$. Dann heißt $\Delta f(x;h) = f(x_0+h) - f(x_0)$ ein Inkrement von f mit Schrittweite h. Natürlich muß h so klein sein, daß $x_0 + h \in I^\circ$ erfüllt ist. Man schreibt mit $y = f(x)$ auch manchmal einfach $\mathsf{d}y$. In diesem Zusammenhang wird h auch mit $\mathsf{d}x$ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $\mathsf{d}f(x_0;h)$ (oder ähnlich) das Differential von f im Punkt x_0.

Genauer:

$$\begin{cases} \mathsf{d}f(x_0;\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ h \mapsto \mathsf{d}f(x_0;h) = f'(x_0)\cdot h. \end{cases}$$

Diese Funktion ist linear[1] in h und eine Approximation für das Funktionsinkrement $\Delta f(x_0;h)$; das sehen wir mit den Vereinbarungen der letzten Sektion. Es gilt nämlich

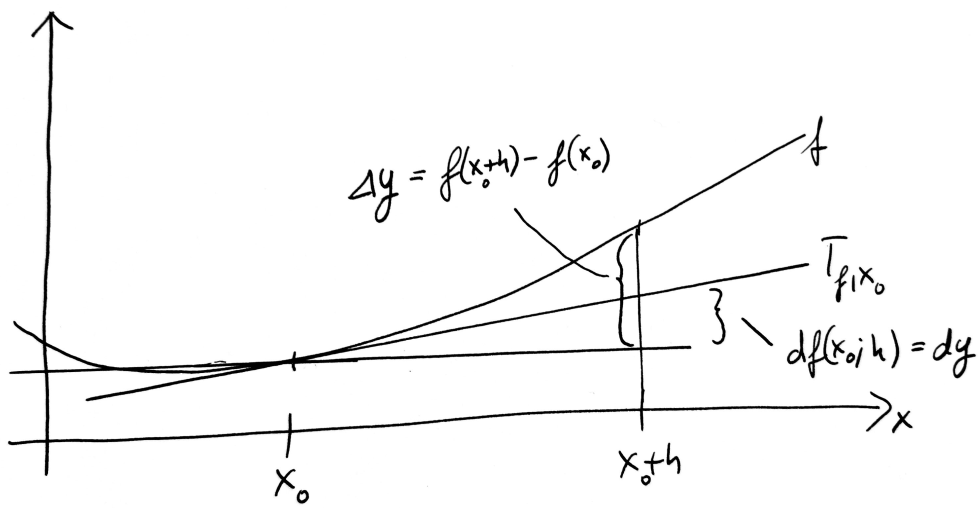
$$\Delta f(x_0+h) - f(x_0) = \mathsf{d}f(x_0;h) + \varphi(h).$$

Man schreibt auch

$$\begin{aligned} \mathsf{d}y &= \mathsf{d}f(x_0;h) \\ &= f'(x_0)h \\ &= f'(x_0)\mathsf{d}\mathsf{x} \\ &= \mathsf{d}f(x_0;\mathsf{d}x) \end{aligned}$$

mit $\mathsf{d}x = x - x_0 = h$.

[1]Das heißt, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathsf{d}f(x_0;\alpha h + \beta h) = \alpha \mathsf{d}f(x_0;h) + \beta \mathsf{d}f(x_0;h)$.



Beispiel 6.6.
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Mit den obigen Vereinbarungen haben wir

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 \\ &= 2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 \\ \mathrm{d}y &= (x^2)'\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Interpretieren Sie die Situation $f(x) = x^2$ als Flächeninhalt (zeichnen Sie entsprechende Bilder) und rechtfertigen Sie $\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

Beispiel 6.7.
Wir wollen einen Näherungswert für $\sin(46^\circ)$ berechnen. Wir machen dabei

davon Gebrauch, daß wir den Wert von Sinus und Cosinus von $45^\circ \cong \frac{\pi}{4}$ *kennen. Wir haben* $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *und* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Wir haben für* $\mathrm{d}x$ *hinreichend klein*

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{23}{90}\pi\right) &= f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0; \mathrm{d}x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,7194.\end{aligned}$$

Die ersten drei Nachkommastellen sind an dieser Stelle genau. An dieser Stelle haben wir noch keine Kontrolle über die Genauigkeit der Approximation. Alles was wir wissen ist, daß die Näherung nicht zu schlecht ist, wenn x *nahe an* x_0 *liegt, was auch immer das heißen soll.*

6.7 Arithm. Regeln für differenzierbare Funktionen

Satz 6.4 (Arithm. Regeln für diffb. Funktionen)**.**
Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I^\circ$. Dann gilt:

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0). \quad \textit{(Summenregel)}$$

(ii) Die Funktion fg ist differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \textit{(Produktregel)}$$

(iii) Sei $g(x) \neq 0$ für alle x nahe an x_0. Dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \quad \textit{(Quotientenregel)}$$

Die Regeln gelten entsprechend in Randpunkten, wenn man Ableitungen durch die einseitigen Ableitungen ersetzt werden.

Übungsaufgabe 6.2.
Der Nachweis der Rechenregeln ist nicht schwer. Versuchen Sie es selbst und lassen Sie sich, was die Tricks angeht, vom Beweis des Satzes 3.5 inspirieren. Sie können den Beweis in Kapitel B finden.

6.8 Die Kettenregel

Ein wichtiges Werkzeug zum Ausrechnen von Ableitungen komplizierter Funktionen ist der

Satz 6.5 (Kettenregel).
Es seien $f\colon J \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to J$ und $x_0 \in I$. Wenn g in x_0 und f in $g(x_0)$ differenzierbar sind, dann ist $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Beweis. Wenn $g(x) - g(x_0) \neq 0$, dann können wir schreiben

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.8.1}$$

Wir zerlegen nun den Rest des Beweises in zwei Fälle.

I Angenommen, es existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\backslash\{x_0\}$ so daß $g(x) = g(x_0)$. Wenn wir eine solche Folge wählen, dann gilt

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Da g in x_0 differenzierbar ist, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (und ist eindeutig), bekommen wir

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{6.8.2}$$

Nun sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ eine Folge mit $(x_n) \to x_0$ für $n \to +\infty$. Wir können $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun in zwei Teilfolgen $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und

$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g(x_{n_l}) = g(x_0)$ und $g(x_{n_k}) \neq g(x_0)$ aufteilen.[2] Damit erhalten wir dann

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{f(g(x_{n_l})) - f(g(x_0))}{x_{n_l} - x_0} = 0.$$

Für $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ können wir (6.8.1) benutzen um

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to+\infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{x_{n_k} - x_0} \\
&\quad = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{g(x_{n_k}) - g(x_0)} \frac{g(x_{n_k}) - g(x_0)}{x_{n_k} - x_0} \\
&\quad = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{g(x_{n_k}) - g(x_0)} \cdot \lim_{k\to+\infty} \frac{g(x_{n_k}) - g(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0
\end{aligned}$$

zu erhalten wobei wir auch (6.8.2) verwenden. Damit haben wir endlich

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(g(x_n)) - f(g(x_0))}{x_n - x_0} = 0.$$

Damit ist der Fall I erledigt.

II Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $g(x) \neq g(x_0)$ für alle $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Dann folgt die Aussage durch den Grenzwert $x \to x_0$ auf beiden Seiten von (6.8.1) und den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen.

□

[2] Eine der Folgen könnte "leer" sein, das stört das Argument aber nicht. Klar?

Mit vollständiger Induktion erhalten wir dank der Rechenregeln mit Beispiel 6.3 sofort

Beispiel 6.8.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Dann ist f auf I differenzierbar und die Ableitung ist $f'(x) = nx^{n-1}$. Für $n = 1$ haben wir das bereits gezeigt. Wir nehmen also an, daß die Aussage für $n = k$ gilt, d.h. $f(x) = x^k$ ist differenzierbar und $f'(x) = kx^{k-1}$. Der Induktionsschritt geht wie folgt. Wir schreiben $f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$ nach den Rechenregeln für Potenzen (Satz 2.10). Da x^k nach Voraussetzung und x nach Beispiel 6.3 differenzierbar ist, ist das Produkt nach (ii) im letzten Satz differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)x^k. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Bemerkung 6.4.
Man kann die Ableitung von x^n auf I auch mit Hilfe des Binomischen Satzes (Satz 2.18) direkt aus der Definition bestimmen. Wenn Sie sich im Anwenden der Definition üben wollen, dann sollten Sie das versuchen. Insbesondere setzt diese Methode nicht voraus, daß man weiß was man zeigen will.

6.9 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Satz 6.6.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $x_0 \in I^\circ$ (d.h. kein Endpunkt) und f an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} definiert in einer Umgebung von $f(x_0)$ und an der Stelle x_0 differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{6.9.1}$$

Bemerkung 6.5.
Wir können Formel (6.9.1) auch als

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

schreiben.

Beweis. Die Umkehrfunktion existiert nach Satz 1.4, da die Funktion streng monoton ist. Es bleibt zu zeigen, daß sie differenzierbar ist. Da f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, finden wir φ, stetig an der Stelle x_0 mit $\varphi(x_0) = f^{-1}(x_0)$ und

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$$

in einer Umgebung von x_0. Wir setzen nun $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Weiter setzen wir $x = f^{-1}(y_0 + h)$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} y_0 + h = f(x) &= f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \\ &= y_0 + \varphi(f^{-1}(y_0 + h))(f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{1}{\varphi(y_0 + h)}.$$

Für $h \to 0$ gilt nach Stetigkeit von f^{-1} an der Stelle y_0, daß $f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0) \to 0$. Da φ an x_0 stetig ist, gilt auch $\varphi(f^{-1}(y_0+h)) \to \varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0)$ also

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\varphi(y_0 + h)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

6.10 Die Ableitung der Exponentialfunktion und der Trig. Funktionen

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist nicht so einfach zu berechnen: Wir beginnen mit

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Wenn wir also wüssten, was

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$$

ist, dann wären wir fertig. Dieser Grenzwert ist das Problem, er ist nicht so einfach zu berechnen, wenn man die Ableitung der Exponentialfunktion nicht kennt. Ohne weitere Rechnungen erwähnen wir hier, daß dieser Grenzwert gleich 1 ist und erhalten, zusammen mit Satz 6.6

Satz 6.7.
Die Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = e^x$.
Die Logarithmusfunktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$ ist in jedem Punkt $x \in (0,\infty)$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$.

6.11 Ableitungen der Grundfunktionen

Funktion	Ableitung
c, $c \in \mathbb{R}$	0
x^n, $n \in \mathbb{Z}$ ($x \neq 0$ wenn $n \leq -1$)	nx^{n-1}
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$, $x \in (0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x
a^x	$\log(a)a^x$
$\log(\lvert x\rvert)$, $x \neq 0$	$\frac{1}{x}$

6.12 Extrema. Satz von Fermat

Definition 6.2 (Lokale Extrema)**.**
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$. Der Punkt $x_0 \in I$ heißt

(i) ***lokales Minimum*** *falls ein $\delta > 0$ existiert, so daß*

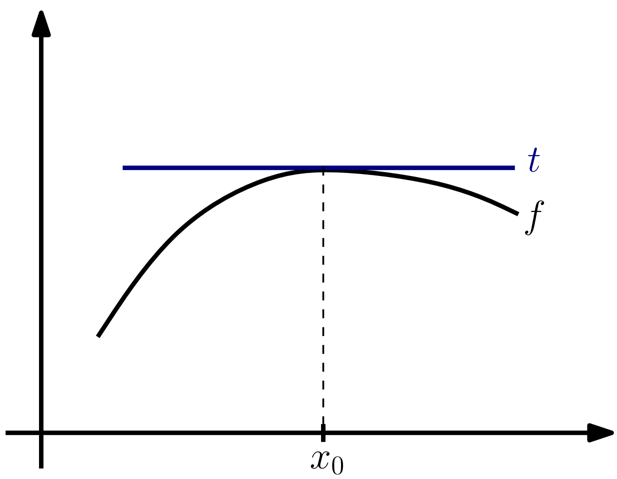
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I. \tag{6.12.1}$$

(ii) ***lokales Maximum*** *falls ein $\delta > 0$ existiert, so daß*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I. \tag{6.12.2}$$

Der nächste Satz stellt eine Verbindung zwischen der Ableitung und den lokalen Extrema einer Funktion her.

Satz 6.8 (Fermat)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x_0 \in I^\circ$ sei f in x_0 differenzierbar. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.



Beweis. Wir nehmen an, daß f in x_0 ein lokales Minimum hat. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad x > x_0 \tag{6.12.3}$$

und

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad x < x_0 \tag{6.12.4}$$

beide nach Definition (6.12.1). Da f in x_0 differenzierbar ist, können wir die (einseitigen) Grenzwert $x \to x_0\pm$ auf beiden Seiten von (6.12.3) und (6.12.4) bilden. Damit bekommen wir $f'(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) \leq 0$. Da beide einseitigen Grenzwerte gleich sein müssen folgt $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkung 6.6.
Sie wissen natürlich, daß $f'(x_0) = 0$ keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum von f in x_0 ist. Als Übungsaufgabe sollten Sie eine Funktion konstruieren, die in einem bestimmten Punkt x_0 die Bedingung $f'(x_0) = 0$ erfüllt aber dort kein Extremum besitzt. Machen Sie sich klar, wieso die Funktion an der Stelle kein Extremum besitzt.

Sprachregelung: Für eine differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ nennen wir einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) = 0$ einen **kritischen Punkt** (oder statio-naären) von f.

Folgerung 6.1 (Klassifizierung von Extrema)**.**
Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Die lokalen/globalen Extrema der Funktion f gehören einer der drei Kategorien an:

(i) kritischer/stationärer Punkt f,

(ii) ein Punkt in (a, b) in dem f nicht differenzierbar ist,

(iii) im Rand des Intervalls.

6.13 Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Der folgende Satz ist von großer Bedeutung als Werkzeug im Umgang mit differenzierbaren Funktionen.

Satz 6.9 (Mittelwertsatz)**.**
Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig, auf* (a,b) *differenzierbar.*
Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ *mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

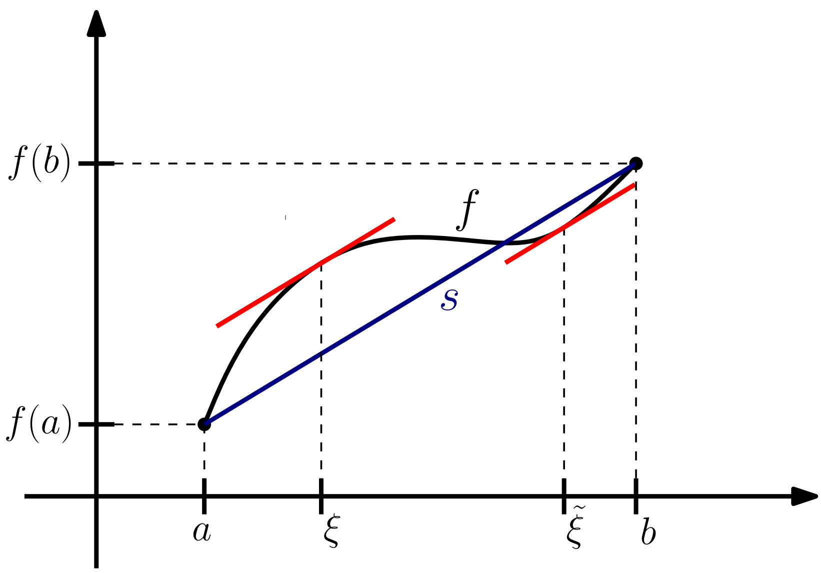


Abbildung 6.5: Interpretation des Mittelwertsatzes (MWS). Dabei ist s die Sekante von f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

Zum Beweis verschaffen wir uns erst

Hilfssatz 6.1 (Rolle)**.**
Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, differenzierbar auf* (a,b) *und mit* $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ *mit* $f'(x_0) = 0$.

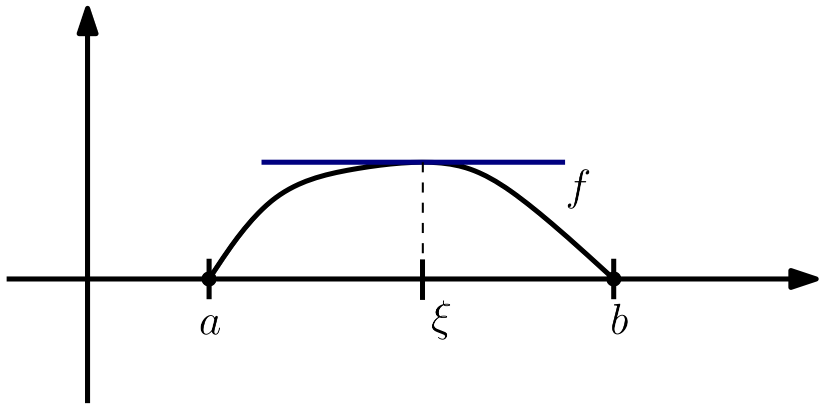


Abbildung 6.6: Interpretation des Satzes von Rolle.

Beweis. Wir können annehmen, daß die Funktion f nicht konstant ist, da sonst, nach Beispiel 6.2, nichts zu beweisen ist. Weiterhin können wir annehmen, daß $f(a) = f(b) = 0$ da wir sonst einfach $F(x) = f(x) - f(a)$ betrachten. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, existiert nach dem Satz von Weierstraß (Satz 5.14) ein x_1 und ein x_2 in $[a, b]$ mit

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Mindestens einer der beiden Punkte x_1 und x_2 ist in (a, b) da andernfalls die Funktion konstant ist. Wir bezeichnen den Punkt mit x_0. Da die Funktion auf (a, b) differenzierbar ist, ist sie insbesondere in x_0 differenzierbar. Nach Satz von Fermat (Satz 6.8) gilt $f'(x_0) = 0$. □

Beweis von Satz 6.9. Wir betrachten $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Da Polynome stetige Funktionen sind und die Summe stetiger Funktionen stetig ist, ist F auf $[a, b]$ stetig. Weiterhin ist F auf (a, b) differenzierbar da die Summe differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist und f und

Polynome differenzierbar sind. Es gilt $F(a) = F(b) = f(a)$. Folglich gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $F'(x_0) = 0$ also

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Satz 6.10 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.**
Die Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar.
Es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.
Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, so daß gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes erfolgt ähnlich wie der Beweis des Mittelwertsatzes. Wir wenden den Satz von Rolle (Satz 6.1) auf

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Die Funktion ist auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und es gilt $F(a) = f(a)$ und $F(b) = f(a)$. Damit liefert der Satz von Rolle die Existenz eines $x_0 \in (a, b)$ mit $F'(x_0) = 0$ also

$$F'(x_0) = f(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0.$$

Damit haben wir die Aussage bewiesen. □

6.14 Anwendungen des Mittelwertsatzes

6.14.1 Charakterisierung konstanter Funktionen

Als erstes wollen wir eine Umkehrung des Beispiels 6.2 beweisen.

Satz 6.11.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt für ein $c \in \mathbb{R}$: $f(x) = c$ für alle $x \in I$.

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.9) gibt es für alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, ein $x_0 \in [x_1, x_2]$ mit

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2).$$

Die Zahl x_0 hängt natürlich von x_1 und x_2 ab, aber da $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, folgt $f(x_1) - f(x_2) = 0$ für jede beliebige Wahl von x_1 und x_2. Folglich ist f auf I konstant. □

6.14.2 Monotonie

Wir benutzen nun die Ableitung einer differenzierbaren Funktion um ihr Monotonieverhalten zu Charakterisieren. Dazu

Satz 6.12.
Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann ist f genau dann monoton wachsend (fallend) auf $[a, b]$, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$ gilt.

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen separat.

[⇒] Ist f wachsend, dann gilt auch $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$ und $h > 0$ hinreichend klein. Damit gilt dann $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ für alle $h > 0$ hinreichend klein. Also, da f differenzierbar ist, $f'(x_0) \geq 0$.

[$\Leftarrow$] Sei also $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt wegen dem Mittelwertsatz auf dem Intervall $[x,y]$ mit $a \leq x < y \leq b$,

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) \geq (y-x) \geq 0.$$

Damit ist f monoton wachsend.

Für monoton fallend folgt die Behauptung analog. $\square$

Folgerung 6.2.
Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f genau dann Streng monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und es kein Intervall $I \subseteq [a,b]$ positiver Länge gibt auf dem f' verschwindet.

Bemerkung 6.7.
An dem Beispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ sieht man leicht, daß man für streng monoton nicht unbedingt braucht, daß die Ableitung nirgends verschwindet.

6.14.3 Satz von Bernoulli/l'Hôpital

Satz 6.13 (Bernoulli/l'Hôpital).
Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, und es sei* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$. *In jeder der beiden folgenden Situationen*

(i) $f(x) \to 0$ *und* $g(x) \to 0$ *für* $x \downarrow a$,

(ii) $f(x) \to \infty$ *und* $g(x) \to \infty$ *für* $x \downarrow a$

gilt: Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

existiert (eigentlich und uneigentlich[a]*), dann existiert auch* $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *(eigentlich und uneigentlich), und es ist*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechend für $x \uparrow b$, $x \to \infty$ *und* $x \to -\infty$.

[a] d.h. der Grenzwert ist $\pm\infty$ wie in Kapitel 5.

Bemerkung 6.8.
Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

uneigentlich ist, also $\pm\infty$, *dann gilt dies auch für den Grenzwert*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Beispiel 6.9.
Der Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1}$ *ist vom Typ '*$\frac{0}{0}$*'. Es gilt*

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(\log(x))'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x} = 1.$$

Der Satz von Bernoulli/l'Hôpital gibt dann

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(\log(x))'}{(x-1)'} = 1.$$

Es ist offensichtlich, daß die beiden einseitigen Grenzwerte $x \to 1\pm$ *die gleichen Grenzwerte liefern.*

Beispiel 6.10.
Der Grenzwert $\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{\log(x)}$ *ist vom Typ '*$\frac{0}{0}$*'. Es gilt*

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x-1})'}{(\log(x))'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = \infty.$$

Die bestimmte Divergenz ergibt sich aus Satz 5.2. Der Satz von Bernoulli/l'Hôpital gibt dann

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{\log(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x-1})'}{(\log(x))'} = \infty.$$

Beispiel 6.11.

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ *ist vom Typ '*$\frac{\infty}{\infty}$*'. Der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

ist auch vom Typ '$\frac{\infty}{\infty}$*'. Wenn wir wieder differenzieren, dann erhalten wir*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

(Das $e^x \to \infty$ *kann man mit der Bernoullischen Ungleichung (Satz 2.11) einsehen*[a] *und dann wenden wir 3.7 an.) Damit erhalten wir mit zweifacher Anwendung des Satzes von Bernoulli/l'Hôpital*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Mit den gleichen Argumenten (n*-fache Anwendung von l'Hôpital) erhält man, daß*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Das bedeutet, daß die Exponentialfunktion (wesentlich) schneller wächst als jedes Polynom; insbesondere bedeutet dies auch, daß für jedes Polynom* n*-ten Grades (beliebig groß), sagen wir* p*, ein* $M \in \mathbb{R}$ *existiert mit* $e^x \geq p(x)$ *für alle* $x \geq M$*.*

[a]Beispielsweise: (mit Benutzung der Monotonie)

$$e^x \geq 2^x \geq 2^{\lfloor x \rfloor} \geq (1+1)^{\lfloor x \rfloor} \geq 1 + \lfloor x \rfloor.$$

Im nächsten Beispiel sind die Voraussetzungen des Satzes 6.13 nicht erfüllt.

Beispiel 6.12.
Wir wollen den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$ *berechnen und es ist auf den zweiten Blick klar, daß der Grenzwert* 0 *sein sollte. Da aber*

$$\frac{(x+\sin(x))'}{(x)'} = 1 + \cos(x)$$

für $x \to \infty$ *nicht existiert (unbestimmt divergent ist), können wir den Satz von Bernoulli/l'Hôpital nicht anwenden. Da* $|\sin(x)| \leq 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *dann*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right) = 0$$

nach Rechenregeln für Grenzwerte (Polizistenprinzip).

Weitere Grenzwerttypen

Wenn der Grenzwert vom Typ '$\pm\infty \cdot 0$' oder '$\infty - \infty$' ist, dann müssen wir zur Anwendung des Satzes Bernoulli/l'Hôpital vorbereitende Umformungen vornehmen. Der Wert x_0 kann im Folgenden in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sein. Die Voraussetzungen des Satzes 6.13 müssen nach der Umformung natürlich erfüllt sein.
Sei also der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ vom Typ '$\pm\infty \cdot 0$'. Diesen muß man dann in die Form

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \qquad \left(\text{Typ}`\frac{0}{0}'\right)$$

oder in die Form

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \left(\text{Typ}`\frac{\pm\infty}{\pm\infty}'\right)$$

bringen.

Beispiel 6.13.
Wir wollen den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} x \log(x)$ *berechnen. Dieser ist vom Typ* '$0 \cdot (-\infty)$'. *Wir schreiben also*

$$\lim_{x \to 0} x \log(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Wir berechnen also

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\log(x))'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0} -x = 0.$$

Damit folgt mit Bernoulli/l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} x \log(x) \Longrightarrow_{x \to 0} \frac{(\log(x))'}{(\frac{1}{x})'} = 0.$$

Die Grenzwertaufgabe

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) \quad (\text{Typ} \quad `\infty-\infty')$$

lässt sich durch die Umformung

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

auf dem Typ '$\frac{0}{0}$' bringen.
Zur Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}, \quad f(x)>0$$

beachte man, daß gilt

$$(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\log(f(x))}. \tag{6.14.1}$$

Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, bleibt also der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\log(f(x))$$

zu untersuchen. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$ vom Typ '0^0', '$(+\infty)^0$' oder '$1^{\pm\infty}$' ist, dann ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log(f(x))$ vom Typ $(\pm\infty)\cdot 0$ kann also evtl. mit den vorher diskutierten Umformungen berechnet werden. (Voraussetzungen von Satz 6.13 beachten!)

Beispiel 6.14.
Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0-}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}},$$

der vom Typ '$1^{-\infty}$' ist, berechnen. Nach 6.14.1 haben wir zu berechnen

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\log(1+\sin(x))}{x}.$$

Wir untersuchen also

$$\lim_{x \to 0-} \frac{(\log(1+\sin(x)))'}{(x)'} = \lim_{x \to 0-} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1.$$

Damit dann also, nach Bernoulli/l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\log(1+\sin(x))}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{(\log(1+\sin(x)))'}{(x)'} = 1$$

also

$$\lim_{x \to 0-} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

6.15 Höhere Ableitungen

Wir bezeichnen im Folgenden die zweite Ableitung von f, also die erste Ableitung von f' mit f''. Die zweite Ableitung kann nur dann in x_0 existieren, wenn f' in einer ganzen Umgebung des Punktes existiert, da für

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

die Werte von f' nicht nur im Punkt x_0 gebraucht werden. Wir definieren induktiv $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Wir benutzen auch manchmal die Notation $\frac{d^n}{dx^n} f$ anstatt von $f^{(n)}$. Wenn eine Funktion in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs (den Rand des Intervalls, wenn vorhanden, behandelt wie vorher) n-mal differenzierbar ist, dann sagen wir n ist n-**mal differenzierbar**. Wenn $f^{(n)}$ auch noch stetig ist, dann heißt f n-**mal stetig differenzierbar**.

6.16 Konvexität

Definition 6.3 (Konvexität)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f ***konvex*** *falls für alle $x, y \in I$ gilt*

$$\lambda \in [0,1]\colon \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Die Funktion f heißt ***strikt konvex*** *wenn für alle $x, y \in I$, $x \neq y$ gilt*

$$\lambda \in (0,1)\colon \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Eine Funktion f heißt genau dann ***konkav****, wenn $-f$ konvex ist.*

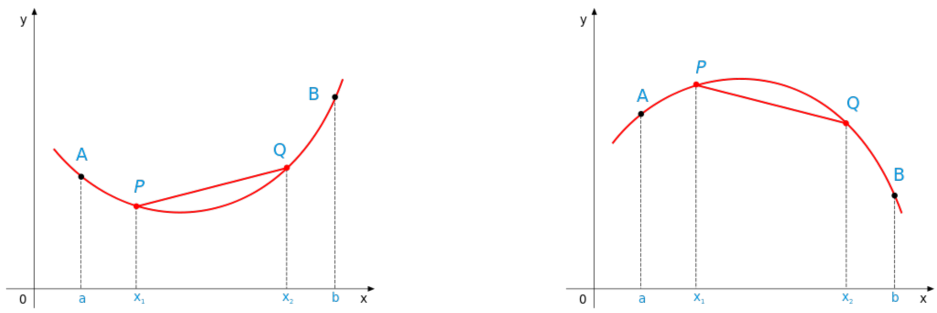


Abbildung 6.7: Illustration der Definitionen **konvex** (links) und **konkav** (rechts).

die Definition von Konvexität ist im allgemeinen schwer zu prüfen. Wie die folgenden Sätze zeigen, wird die Untersuchung der Konvexität (Krümmung) leichter, wenn man Ableitungen zur Verfügung hat.

Satz 6.14.
Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir für jedes $z \in (a, b)$ die 'Tangentenfunktion'

$$t_z : x \mapsto f(z) + f'(z)(x - z).$$

die Funktion f ist in (a, b) genau dann konvex [konkav], wenn

$$f(x) \geq t_z(x) \quad [f(x) \leq t_z(x)]$$

für alle $z \in (a, b)$ und alle $x \in (a, b)$ gilt.

Vereinfacht ausgedrückt: Jede Tangente an f verläuft unterhalb [oberhalb] des Graphen von f. Das wird im kommenden Satz noch einmal präzisiert.

Satz 6.15.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann ist f genau dann konvex auf I, wenn f' monoton wachsend ist. Ist f zweimal differenzierbar auf I, dann ist f genau dann konvex auf I, wenn $f'' \geq 0$.

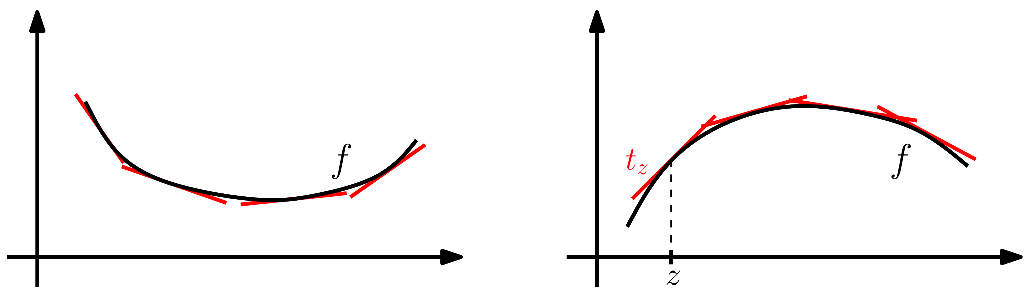


Abbildung 6.8: Situation der Sätze 6.14 und 6.15 am Beispiel einer konvexen (links) und einer konkaven Funktion (rechts).

Übungsaufgabe 6.3.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^x$,

(iii) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \log(x)$ *und*

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \sin(x)$,

mit Hilfe von Satz 6.15.

6.17 Taylor Polynome

Satz 6.16 (Taylor'scher Satz mit Lagrange Restglied).
Sei f auf $[a,x]$ n-mal stetig differenzierbar und $n+1$ mal differenzierbar auf (a,x), Dann existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Es gilt eine analoge Aussage für $x < a$ und f n-mal stetig differenzierbar auf $[x,a]$ und $n+1$-mal differenzierbar auf (x,a).

Bemerkung 6.9.
Es ist wichtig zu bemerken, daß ξ von x abhängt.

Sprachregelung: Wir nennen

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

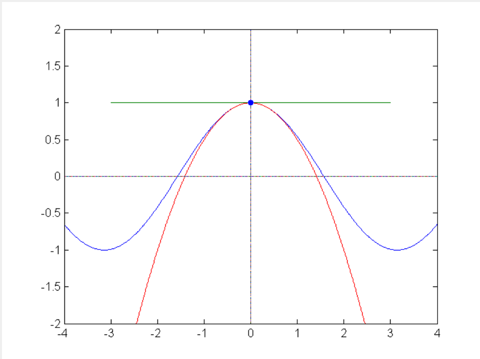
das n-**te Taylorpolynom** der Funktion f. Die Taylorpolynome geben eine Approximation der Funktion f in der Nähe des Punktes a. Der Fehler hat die Form

$$R_n(x) = f(x) - T_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Diesen nennen wir das **Restglied** (in Lagrange-Form). Wenn sich das Restglied gut verhält, dann approximieren die Taylorpolynome die Funktion f für größer werdendes n auf einer größer werdenden Umgebung von x_0 'gut'. Was das heißt soll im folgenden noch untersucht werden. Die ersten beiden Beispiele zeigen, wie die Taylorpolynome mit größerem n 'besser' werden. Dann diskutieren wir wie man diese Aussage quantifiziert.

Beispiel 6.15.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ *(blau) läßt sich nahe* $x_0 = 0$ *durch die Tangente* $t(x) = 1$ *approximieren (grün). Besser ist jedoch die Approximation durch*

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \textit{(rot)} \end{aligned}$$



Übungsaufgabe 6.4.
Wie lautet das 3. und 4. Taylor-Polynom von f*?*

Beispiel 6.16.

Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ *und* $x_0 = 0$ *gilt:*

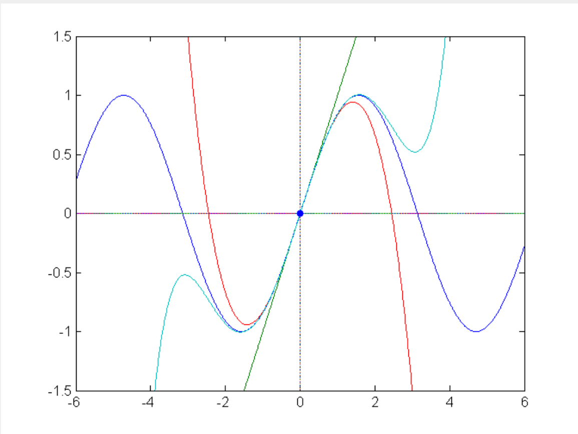
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x), \\ f''(x) &= -\sin(x), \\ f'''(x) &= -\cos(x), \\ f^{(4)} &= f, \\ f^{(5)} &= f', \dots \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = -1,\ f^{(4)}(x_0) = 0, \dots$$

Die ersten 6 Taylor-Polynome lauten also

- $T_1(x) = 0 + 1(x-0) = x$,
- $T_2(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 = x$,
- $T_3(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 - \frac{1}{6}(x-0)^3 = x - \frac{1}{6}x^3$,
- $T_4(x) = T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$,
- $T_5(x) = T_6(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$.



Beispiel 6.17.
Für die allgemeine Ableitung von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ *ergibt sich*

$$f^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Die Leserin sollte dies mit vollständiger Induktion nachweisen. Damit haben wir insbesondere

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{\sin(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Da $|\sin(x)| \leq 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt folgt für ein beliebiges* $x \in \mathbb{R}$, *daß* $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$; *die Polynome nähern* f *also für große* n *immer besser an egal wie weit* x *von* x_0 *weg liegt. (Natürlich muß man* n *grösser wählen für die gleiche Approximationsgüte wenn* x *weiter von* x_0 *liegt.) Wir untersuchen* R_n *quantitativ auf dem Intervall* $[-1, 1]$: *Es gilt*

$$\sup_{x\in[-1,1]} |R_n f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Wie groß sollten wir n *wählen, damit der Approximationsfehler stets kleiner ist als* $\frac{1}{100}$? *Da* $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. *Da aber* $4! = 24$ *gilt müßen wir* n *wenigstens* 4 *wählen.*

Übungsaufgabe 6.5.
Führen Sie die gleiche Analyse für $f(x) = \cos(x)$ *aus Beispiel* **??** *aus. Zeigen Sie insbesondere, daß*

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

gilt.

Beispiel 6.18.

Wir betrachten $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathsf{log}(1+x)$. *Wir erhalten*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\ f''(x) &= -1 \cdot \frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= 2 \cdot \frac{1}{(1+2)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1+x^n}. \end{aligned}$$

Wir raten die allgemeine Ableitung:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Dies weisen wir mittels vollständiger Induktion nach. Der Fall $n = 1$ *ist ist klar. Wir nehmen also an, daß die Formel für ein* $n = k \in \mathbb{N}$ *gilt (Induktionsvoraussetzung) und rechnen für den Induktionsschritt*

$$\begin{aligned} f^{(k+1)(x)} &= (\frac{d}{dx} f^{(k)})(x) \\ &= \frac{d}{dx}((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}), && \textit{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{(-k) \cdot (k-1)!}{(1+x)^{k+1}} && \textit{(Ketten- und Potenzregel)} \\ &= (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Wenn wir $x_0 = 0$ *wählen, dann erhalten wir*

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \geq 1, \quad f^{(0)}(0) = f(0) = 0$$

und damit

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Wie gut ist diese Approximation? Für sin *und* cos *haben wir (bzw. Sie) in den letzten beiden Beispielen* $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gehabt. Hier ist die Situation nicht so gut. Sei* $x \geq 0$. *Dann haben wir*

$$|R_n f(x)| = \left|(-1)^n \frac{1}{n(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1}\right|$$
$$\leq \frac{x^{n+1}}{n}.$$

Damit gilt, nach Satz 3.3 und dem Polizistenprinzip, daß $R_n(x) \to 0$ *für* $n \to \infty$ *wenn* $x \in [0,1]$. *Wenn* $x \in (-1,0)$, *dann gilt* $x = \delta - 1$ *für ein* $\delta \in (0,1)$. *Damit gilt* $1 + \xi \geq \delta > 0$ *da* $x \leq \xi \leq 0$ *gilt. Damit können wir abschätzen*

$$|R_n f(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n\delta^{n+1}}.$$

Hier wollen wir wieder nach Satz 3.3 (bzw. Satz 3.10) und dem Polizistenprinzip argumentieren. Dazu brauchen wir allerdings $|x| < \delta$. *Das gilt nur für* $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$. *Wir erhalten also* $R_n(x) \to 0$ *für* $n \to \infty$ *für alle* $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$. *Was ist mit* $x \in (-1, \frac{1}{2}]$? *Den Fall* $x = -\frac{1}{2}$ *kann man noch direkt behandeln aber den Rest bekommen wir aus dem Lagrange-Restglied nicht ohne weiteres heraus. Mit einer anderen Form des Restgliedes (Cauchy[a]) kann man zeigen, daß* $R_n(x) \to 0$, $n \to \infty$ *auch für die verbleibenden* $x \in (-1, \frac{1}{2})$; *siehe beispw. [9] Seite 118 ff.. Wenn* $x \in (1, \infty)$, *dann geht das Restglied nicht gegen* 0*!*

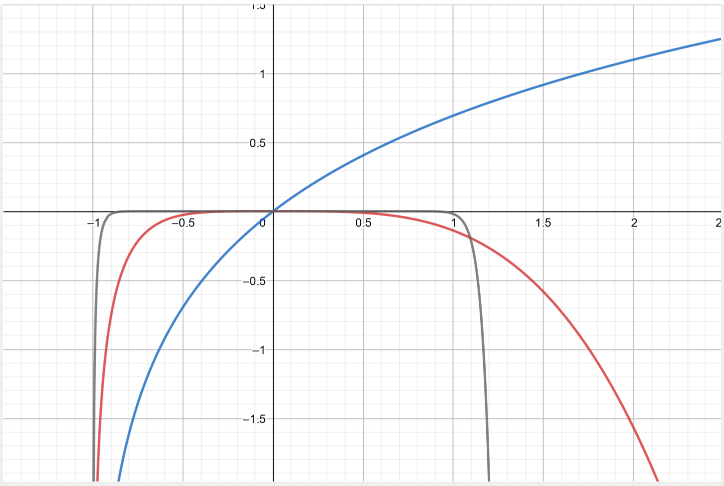


Abbildung 6.9: Darstellung der Funktion f und der Restglieder $R_3 f$ (rot) und $R_{25} f$ (grau). Die Leserin bemerke, daß die Restglieder nur auf dem Intervall $(-1, 1)$ im wesentlichen verschwinden. Wir werden auf diesen Punkt in Abschnitt 9.7 zurück kommen.

Wir wollen hier noch eine Analyse auf Intervallen $[a, b] \subseteq (-1, 1)$ versuchen und uns auf die Benutzung des Lagrange-Restgliedes beschränken. Sehen wir uns die Approximation auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ an. Dort haben wir

$$\sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \sup_{\xi \in [0, \frac{1}{2}]} \frac{1}{n(1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n n!}.$$

Hier können wir f also beliebig genau durch ein Taylor-Polynom annähern. Für einen Fehler von weniger als $\frac{1}{100}$, sollten wir n mindestens so wählen, daß $2^n \cdot n \geq 100$, also $n = 5$. Wie sieht es auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, 0]$ aus? Wir haben

$$\sup_{x \in [-\frac{1}{2}, 0]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{n}$$

da $1 + \xi \geq -\frac{1}{2}$. Hier brauchen wir also $n = 100$ um die gleiche Approximationsgüte zu erhalten. (Jedenfalls können wir mit unserer Abschätzung *nichts besseres erhalten.)*

[a]Es existiert ein ξ' zwischen x und x_0 mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{n!}(x-\xi')^n(x-x_0).$$

Wir schlißen diese Sektion mit der Betrachtung der Taylor-Polynome einer weiteren wichtigen Funktion, der Exponentialfunktion, ab. Diese Betrachtungen werden uns im Kapitel 9 wieder nützlich sein.

Beispiel 6.19.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Die Ableitungen sind hier besonders einfach, da $f^{(n)} = f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir haben also für $x_0 = 0$

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k$$

und

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)} x^{n+1}.$$

Wir sehen, daß, $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Angenommen wir wollten wissen, für welches n die Taylor-Polynome $T_n f$ die Funktion f auf dem Intervall $[0,2]$ mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{1000}$ approximieren. Wir haben dann ein $n \in \mathbb{N}$ zu finden mit

$$\sup_{x\in[0,2]} |R_n f(x)| \leq \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{1000}. \tag{6.17.1}$$

Da $10! = 3628800$ und $2^{10} = 1024$ gilt damit

$$\frac{2^(10)}{(10)!} = 4/14175 \leq \frac{1}{1000}.$$

Also sollten wir $n = 10$ wählen.

6.18 Kurvendiskussion – (Anwendung Taylor)

Satz 6.17.
Sei f n-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ und es gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann

*(i) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein **lokales Minimum** von f.*

*(ii) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein **lokales Maximum** von f.*

*(iii) Ist n ungerade, dann ist x_0 **keine lokale Extremstelle** von f.*

Im dritten Fall wechselt für $n \geq 3$ auch f'' das Vorzeichen.

Sprachregelung: Einen Punkt x_0 an dem das Vorzeichen von f'' wechselt nennt man einen **Wendepunkt** (Fahrradbild). Die Funktion wechselt an einem Wendepunkt von konkav zu konvex oder von konvex zu konkav. Die Tangenten sind auf der einen Seite des Wendepunktes oberhalb des Graphen und auf der anderen unterhalb des Graphen. Ein Wendepunkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt **Sattelpunkt**.

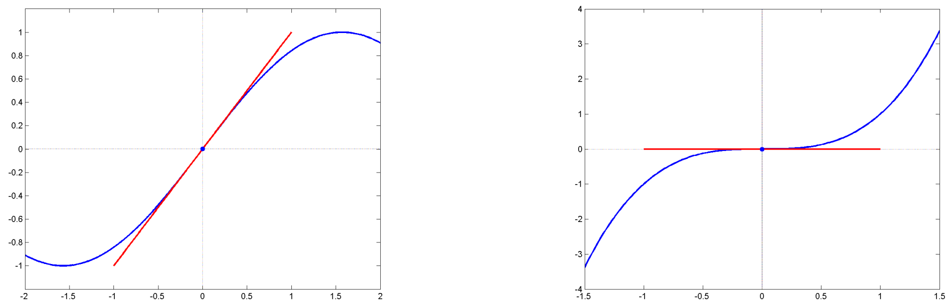


Abbildung 6.10: $f(x) = \sin x$ (links) mit Wendepunkt $(0, 0)$ und $g(x) = x^3$ (rechts) mit Sattelpunkt $(0, 0)$

Was gehört zur Kurvendiskussion? Hier listen wir ein paar Punkte auf, die man üblicherweise durchgehen muß, wenn man den Verlauf einer Funktion **diskutieren** will.

1. Festlegung des (maximalen) Definitionsbereiches, wenn dieser nicht gegeben ist.

2. Festlegung des Bereiches auf dem die Funktion stetig ist und des Bereiches auf dem sie differenzierbar ist. Wenn man die zweite Ableitung berechnet und die auf einem kleinerem Bereich existiert, dann sollte das Wohl auch notiert werden. Die Stetigkeitsuntersuchung gibt dann bspw. Pole wenn diese vorhanden sind. Beispielsweise ist
$$x \mapsto \frac{x^2+1}{x-2}$$
auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ stetig und hat in $x = 2$ einen Pol der Ordnung 1.

3. Berechnung der ersten zwei bzw. drei Ableitungen. Die dritte speichert bspw. das Monotonieverhalten der zweiten Ableitung. Manchmal wird, siehe den letzten Satz, eben auch eine höhere Ableitung als die zweite für die Bestimmung der Art der Extrema braucht.

4. Untersuchen der Funktion an den Rändern des Definitionsbereiches. Zum einen an den äußeren Rändern als auch an den möglicherweise gefundenen Polstellen.

5. Bestimmung der Extremstellen (Argumente an denen Extrema vorliegen) und Extremwerte (Funktionswerte) von f.

6. Untersuchung des Monotonieverhaltens der Funktion f, üblicherweise durch die Vorzeichen von f'.

7. Untersuchung des Krümmungsverhaltens der Funktion f, üblicherweise durch die Untersuchung der Monotonie von f', also die Vorzeichen von f''.

8. Zeichnen des Funktionsgraphen, Markierung der wichtigen Punkte.

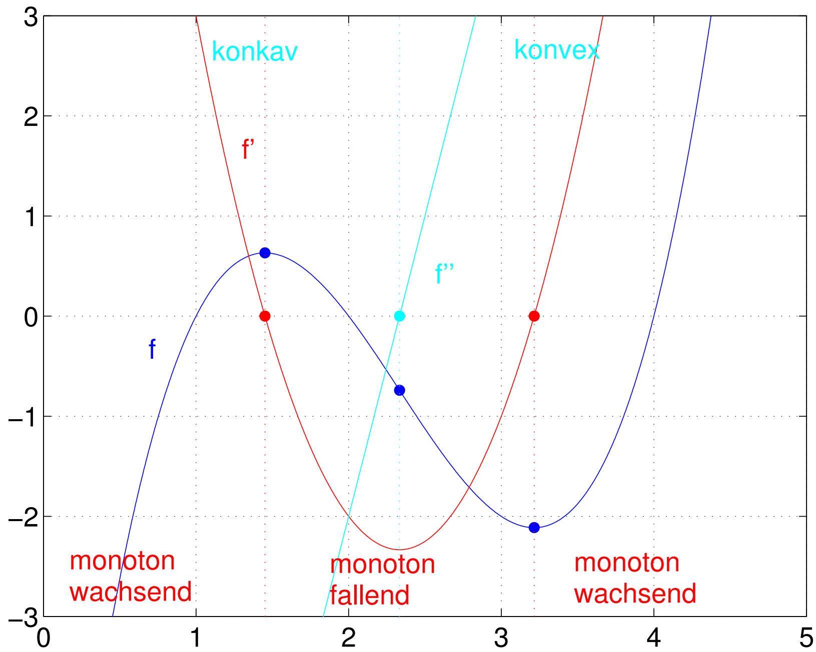


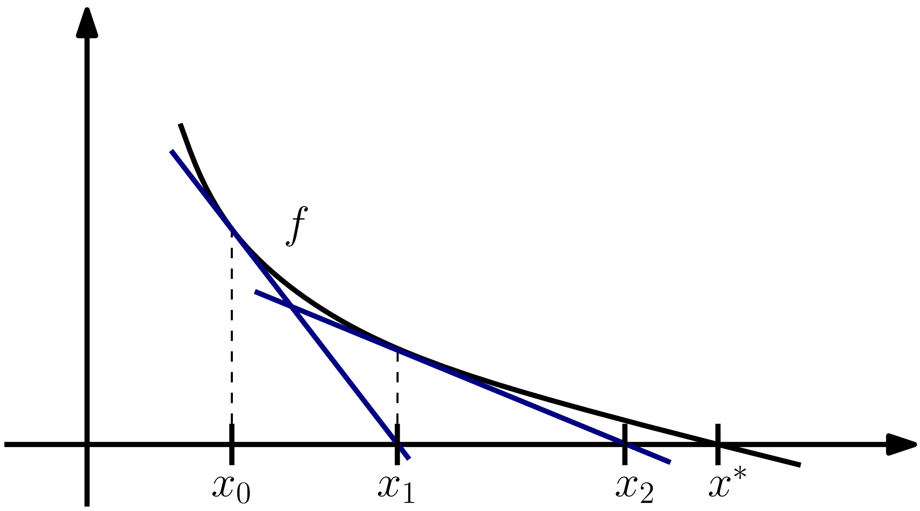
Abbildung 6.11: Dargestellt ist eine Funktion f, ihre Ableitungen f' und f'', sowie die resultierenden Monotonie- und Krümmungsbereiche.

6.19 Anwendung Differentialrechnung: Newton-Verfahren

Vorgelegt sei ein differenzierbares f. Wir wollen Lösungen der Gleichung

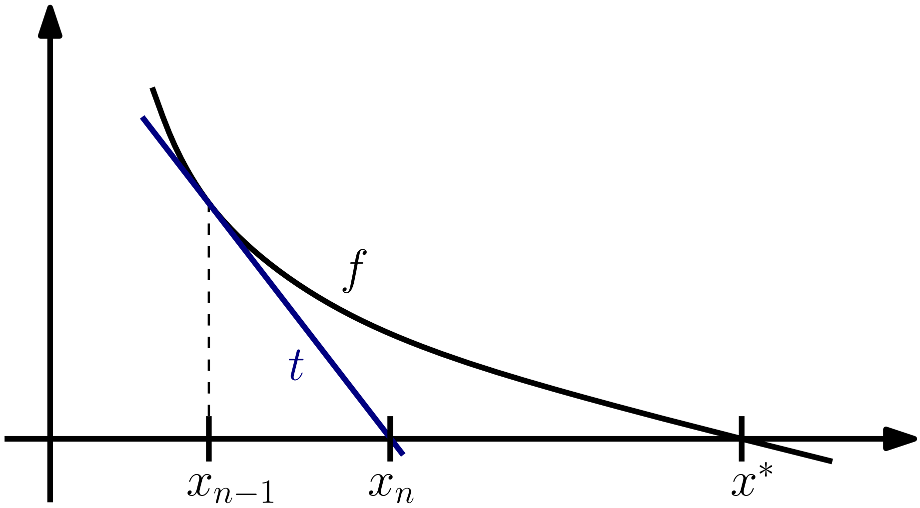
$$f(x) = 0 \tag{6.19.1}$$

bestimmen. Ziel ist, die Bestimmung einer Lösung x^* von (6.19.1), ausgehend von einem Startwert x_0, der möglichst in der Nähe von x^* liegt.



Man berechnet im n-ten Schritt die Nullstelle x_n der Tangente t an f in x_{n-1}. Diese wird als neue Näherung für x^* verwendet. Natürlich wird man zu Beginn einen Startwert x_0 wählen müssen.

n	x_n	$\vert f(x_n)\vert$
1	$\underline{-0.5}00000000000000$	$1.06 \cdot 10^{-1}$
2	$\underline{-0.56}6311003197218$	$1.30 \cdot 10^{-3}$
3	$\underline{-0.567143}165034862$	$1.96 \cdot 10^{-7}$
4	$\underline{-0.56714329040978}1$	$4.55 \cdot 10^{-15}$
5	$\underline{-0.567143290409784}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$



Wir stellen die Bedingung

$$t(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Umstellen nach x_n führt auf die Verfahrensvorschrift des **Newton-Verfahrens**:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.19.2}$$

Für das Beispiel $f(x) = x + e^x$ aus Abschnitt 4.3 liefert (6.19.2) die Vorschrift

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} + e^{x_{n-1}}}{1 + e^{x_{n-1}}}.$$

Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ liefert Matlab/GNU Octave folgende Werte: Für 14 Nachkommastellen benötigt man gerade 4 Schritte. Das Intervallhalbierungsverfahren hätte dagegen 48 Schritte gebraucht!

Wenn! das Newton-Verfahren konvergiert, dann wesentlich schneller als das Intervallhalbierungsverfahren.

Faustformel: in jedem Schritt Verdopplung der Anzahl korrekter Dezimalstellen.

Voraussetzung für Konvergenz ist aber, daß der Startwert x_0 'genügend nahe' bei x^* liegt ('lokal konvergentes Verfahren').

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dagegen zweimal stetig differenzierbar (d.h. f'' ist stetig) sowie konvex, und besitzt f eine reelle Nullstelle, so konvergiert die Newton–Folge für jeden Startwert x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$.

Übungsaufgabe 6.6.
Man mache sich die letzten beiden Aussagen an den Beispielen $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 1$ *und* $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2 e^{-x}$ *graphisch klar.*

6.20 Anwendung Differentialrechnung: Linearisierung

Linearisierung ist, wie wir am Anfang des Kapitels diskutiert haben, im wesentlichen die Grundlage für die Definition der Ableitung, siehe Satz 6.3. Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ wenn ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \approx f(x_0) + a(x - x_0)$$

existiert, d.h. die Funktion ist im wesentliche eine affine/lineare Funktion in der Nähe von x_0. Besser: $f(x) - f(x_0) \approx a(x - x_0)$, d.h. die Funktionswert Änderungen sind linear in der Nähe von x_0.

6.21 Anwendung Differentialrechnung: Fehlerfortpflanzung

Eine wichtige Anwendungen der Differentialrechnung ist die Analyse der Fortpflanzung von Meßfehlern. Es sei f eine Funktion die hinreichend schön ist, so daß alles folgende Sinn ergibt. Mit x bezeichnen wir eine reelle Zahl und mit $\tilde{x}$ die gleiche Zahl, die mit einem Fehler (also $\tilde{x} = x + h$) behaftet ist, beispielsweise durch einen Meßprozess. Den Absoluten Fehler $\tilde{x} - x$ bezeichnen wir wie zuvor mit dx.
Wir wollen nun untersuchen, wie sich der Meßfehler auf eine berechnete Größe $y = f(x)$ auswirkt. Wir setzen $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ und

$$\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x) = f(x + \mathrm{d}x) - f(x).$$

Wenn nun $|\mathrm{d}x|$ 'klein' ist, dann können wir Δy durch

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

annähern. Für konkrete Rechnungen, da wir x nicht kennen, müssen wir $f'(\tilde{x})$ anstelle von $f'(x)$ verwenden. Wenn nun eine Schranke für $|\mathrm{d}x|$ bekannt ist, wir nennen Sie hier $\varepsilon > 0$, dann erhalten wir

$$|\Delta y| \leq |f'(x)|\varepsilon$$

bzw.

$$|\Delta y| \leq |f'(\tilde{x})|\varepsilon.$$

Der relative Fehler $\frac{\Delta y}{y}$ ergibt sich zu

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\mathrm{d}y}{y} = \left(\frac{x}{f(x)}f'(x)\right)\frac{dx}{x}$$

mit den gleichen Bemerkungen wie zuvor da wir $\tilde{x}$ nicht kennen und natürlich mit der Annahme, daß $f(x) \neq 0$ und $x \neq 0$. Wenn man eine Schranke für den relativen Fehler $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ hat, sagen wir $\delta > 0$, dann ergibt sich

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right| \leq \left|\frac{x}{f(x)}f'(x)\right|\delta$$

bzw.

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{\mathsf{d}y}{y}\right| \le \left|\frac{\tilde{x}}{f(\tilde{x})} f'(\tilde{x})\right| \delta.$$

Beispiel 6.20.
gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 + 2$.

a) Wir berechnen die Ableitung von f*:*

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 12x.$$

b) Wir bestimmen die lineare Approximation von f *um den Punkt* $x_0 = 1$*:*

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(1) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + \mathsf{d}f(x_0; x - x_0) \\ &= 4 - 3(x - 1) \end{aligned}$$

c) Wir berechnen $f(1,01)$ *und* $f(1,02)$ *mit unserer Näherung:*

$$f(1,01) \approx 4 - 3(1,01 - 1) = \frac{397}{100} = 3,97,$$
$$f(1,02) \approx 4 - 3(1,02 - 1) = \frac{394}{100} = 3,94.$$

d) Wir berechnen Δy

$$\Delta y = \Delta f(1; 0,1) = -0,0314099999,$$
$$\Delta y = \Delta f(1; 0,1) = -0,0656799968$$

und $\mathsf{d}y$

$$\mathsf{d}y = f'(1) \cdot 0,1 = -0,3,$$
$$\mathsf{d}y = f'(1) \cdot 0.2 = -0,6.$$

e) Angenommen, der Wert von f *ist mit einer Genauigkeit von* $\pm 0,1$ *zu* 1 *bestimmt. Was ist der Fehler bei der Berechnung von* $f(x)$*?*
Wir haben nach Aufgabenstellung $|\mathrm{d}x| \leq 0,1$*. Da der Fehler von der Berechnung von* f *durch*

$$|\Delta f| \approx |f'(x_0)||dx|$$

berechnet folgt $|\Delta f| \leq 3 \cdot 0,1 = 0,3$*. Umgekehrt will man auch oft wissen, wie genau man eine Größe messen muß, damit* f *zu vorgegebener Genauigkeit berechnet werden kann.*

6.22 Übungsaufgaben

Aufgabe 40

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres, offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \tag{GW}$$

existiert und gleich $f'(x_0)$ ist.

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß aus der Existenz des Grenzwertes (GW) nicht folgt, dass f in x_0 differenzierbar ist.

Aufgabe 41

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß f auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Zeigen Sie weiter, daß f für $a > 1$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 42

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{\cos^2 x}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom T_2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie weiterhin, daß der Fehler $\|f - T_2\|_\infty$ auf dem Intervall $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ kleiner ist als 10^{-2}.

Aufgabe 43

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$ ist auf dem Intervall $[0, 1]$ so durch ein Polynom p zu ersetzen, daß f und p in den Nullstellen und den Extremstellen übereinstimmen.

Hinweis: Achten Sie darauf Ihren Gedankengang vernünftig zu dokumentieren.

Aufgabe 44

Hat die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

eine stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$?
Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe einmal mit dem Satz von Bernoulli/l'Hôpital und einmal mit dem Satz von Taylor.

Aufgabe 45

Zeigen Sie die nachfolgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = 2$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin(x)} - \cos(x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} = 4$,

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \log(1 + \frac{1}{x}) = 1$,

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{4}$,

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \log(x) \cdot \log(1 - x) = 0$,

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = -2$,

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$,

(viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) + e^x + +e^{-x} - 4}{x^4} = \frac{1}{6}$.

Aufgabe 46

Eine Warnung von Stolz,[3] siehe [12]. Für $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$, $g(x) = f(x)e^{\sin(x)}$ existiert $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht obwohl

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos(x)}{x + \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)} e^{-\sin(x)}$$

existiert; der Grenzwert ist gleich 0. Wo steckt der Fehler.

Aufgabe 47

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ auf Differenzierbarkeit.

(a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten.

Aufgabe 48

Ist die Funktion $f(x) = a|x|x^4$ mit $a \in \mathbb{R}$ überall differenzierbar?
Hinweis: wie vorherige Aufgabe.

Aufgabe 49

Bestimmen Sie alle Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so daß die folgende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x < 0, \\ \beta x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 50

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von $f(x) = \log(x)$ an der Stelle $x = 2$.

[3] Otto Stolz 1842-1905, deutscher Mathematiker.

2. An welchen Stellen verläuft die Tangente an den Graphen von $g(x) = x^2$ parallel bzw. senkrecht zur Tangenten t aus Aufgabenstellung (a)?

   Hinweis: Die Graphen zweier linearer Funktionen $h_i(x) = m_i x + c_i$, $i = 1, 2$, stehen senkrecht aufeinander, wenn für deren Anstiege die Beziehung $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ gilt.

In den nächsten 5 Aufgaben sind jeweils die ersten Ableitungen zu bilden. Jede Aufgabe hat dabei einen gewissen Schwerpunkt (welchen?).

Aufgabe 51

Berechnen Sie die 1. Ableitung der nachfolgend angegebenen Funktionen. Geben sie weiterhin den maximalen Definitionsbereich an sowie den maximalen Bereich auf dem die Ableitung existiert.

(i) $f(x) = \dfrac{42}{x}$,

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$,

(iii) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 42$,

(iv) $f(x) = (2x^2 + 4x)(3x^3 - 2x^2 + 3x)$

(v) $f(x) = f(x) = (4ax^2 + x)\sqrt{x^3}$, $a \in \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = x^n a^x$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$,

(vii) $f(x) = \dfrac{2\sin(x) + \cos(x)}{x^2}$,

(viii) $f(x) = \dfrac{e^x + \log(x)}{\sin(x)}$,

(ix) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$,

(x) $f(x) = \sin(x^2)$,

(xi) $f(x) = \sqrt{(x^2 + 4x)^3}$,

(xii) $f(x) = \log(\tan(x))$,

(xiii) $f(x) = (2x)^{\sin(x)}$, $x > 0$,

(xiv) $f(x) = \sqrt{x}^{\tan(x)}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 52

Wie lautet die k-te Ableitung von

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$, (ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$?

Aufgabe 53

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen.

(i) $f\colon (0,10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x-2}{x}$, (ii) $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$?

Aufgabe 54

Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion (Null- und Polstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen bzw. am Rand) durch.

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,
2. $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{-x^2}$,
4. $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x(\log(x))^2$.

Aufgabe 55

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} x \log^2 x$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\sin x}$.

Aufgabe 56

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad n (mit Entwicklungsstelle $x = x_0$) zu folgenden Funktionen.

1. $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{2}},\ x_0 = 0,\ n = 2$,
2. $f(x) = \sqrt{1+x},\ x_0 = 0,\ n = 3$,
3. $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2},\ n = 2$.

Aufgabe 57

Zur Berechnung von $\log(1.21)$ soll die Funktion $f(x) = \log(x^2)$ verwendet werden.

1. Benutzen Sie dazu den Satz von Taylor mit $x_0 = 1$ und $n = 0, 1, 2, 3$.

2. Berechnen Sie näherungsweise $\log(1.96)$ und $\log(4)$ mit $n = 3$. Schätzen Sie außerdem den Fehler mit Hilfe des Restglieds ab.

7 Integralrechnung (Schule)

Integralrechnung ist, das werden wir im Laufe der kommenden Sektionen verstehen, im wesentlichen die 'Umkehrung' der Differentialrechnung. Dies sollte man aber nicht zu wörtlich nehmen wie wir im Detail sehen werden. Differentiation ist in gewisser Weise eine 'bösartige' Operation die Information über die Funktion 'vergißt' und die Funktion läßt sich ohne weiteres nicht aus der Kenntnis der Ableitung rekonstruieren.

Integrale haben eine Vielfalt von möglichen Anwendungen. Mit Integralen von Funktionen einer Variablen kann man Antworten auf die folgenden Fragen finden.

- Bestimmung von Flächeninhalten nicht geradlinig berandetet Gebiete. Beispielsweise, welche Fläche wird von der Parabel $y = x^2$ und der Ordinaten-Achse vom Ursprung bis zu einem Punkt P eingeschlossen? Auf diese Frage fand Archimedes bereits vor über 2000 Jahren die Antwort $\frac{1}{3}P^3$. Nach Archimedes und seiner Exhaustionsmethode gab es in den nachfolgenden Jahrhunderten zwar hier und da Fortschritte aber der Durchbruch gelang erst in England und Deutschland des 17. Jahrhunderts durch die Erfindung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz. Der moderne Integralbegriff entstand erst mit Riemann und dann Anfang des 20. Jahrhunderts mit Lebesgue.

- Berechnung der Länge einer nichtlinearen Kurve.

- Berechnung von Mittelwerten von Funktionen.

7.1 Das unbestimmte Integral

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. In Kapitel 6 haben wir untersucht, wie wir einer Funktion f eine andere Funktion f', gegeben durch

$$f' : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

zuordnen; diese gibt in jedem Punkt den Anstieg der Tangente an den Graphen von f an und wir können damit in jedem Punkt $x_0 \in I$ die Tangente $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ an den Graphen von f finden.

Wir wollen nun den umgekehrten Prozeß betrachten, d.h. wir wollen aus dem Wissen um die Anstiege, wenn möglich, die ursprüngliche Funktion rekonstruieren. Wir wollen also zu der gegebenen Funktion f eine Funktion, oft mit F bezeichnet, finden, für die gilt $F' = f$; diese Funktion wird eine Stammfunktion von f genannt. So ist Beispielsweise $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x$ eine Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Allerdings ist natürlich auch $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = x + 1$ eine, da auch $G'(x) = 1$ gilt.

Im Folgenden werden wir dies präzisieren und Regeln diskutieren mit denen man neue solche sogenannten Stammfunktionen aus bekannten Grundfunktionen berechnen kann.

Wir beginnen mit dem unbestimmten Integral, da dies für viele Studierende im wesentlichen Abiturstoff ist. Wir werden hier und da etwas genauer sein. Danach führen wir das bestimmte Integral über den sogenannten Hauptsatz der Differential und Integralrechnung formal ein und diskutieren seine Bedeutung. Abschließend erarbeiten wir das bestimmte Integral nach Riemann (siehe Kapitel 8) und diskutieren den Zusammenhang zwischen diesem und dem vorher eingeführten unbestimmten Integral. Dies wird (wieder) im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zusammengefaßt. Nach der Diskussion der uneigentlichen Integrale kann die Leserin sich mit mit dem sogenannten Regelintegral, einem Vorläufer des Lebesgue-Integrals, vertraut machen. Dies ist kein Prüfungsstoff, illustriert aber sehr gut Grundprinzipien der Analysis.

Nämlich das man Operationen auf einfachen Objekten definiert und diese dann durch einen Vervollständigungsprozeß auf kompliziertere ausweitet.

Wir beginnen mit dem Begriff der aus der Schule bekannten Stammfunktion.

Definition 7.1 (Stammfunktion)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist mit

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I,$$

dann heißt F eine Stammfunktion von f.

Bemerkung 7.1.
Wie zuvor ist auch in der letzten Definition die Ableitung als links- oder rechtsseitige Ableitung zu verstehen, wenn der Punkt $x \in I$ ein Randpunkt des Intervalls ist.
Natürlich erweitert sich die Definition sofort auf geeignete $I \subseteq \mathbb{R}$ die durch Vereinigung von Intervallen entstehen.

Bemerkung 7.2.
Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist und F eine Stammfunktion von f, dann ist natürlich auch $F + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\mathbb{R}$. Da die konstanten Funktionen auf einem Intervall genau diejenigen mit $f' \equiv 0$ sind (Welche Argumente garantieren das?) haben wir: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\{F + c\colon\ c \in \mathbb{R}\}$$

die Menge alle Stammfunktionen von f.

Beispiel 7.1.
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. *Da wir schon wissen, daß* $(x^2)' = 2x$ *gilt, haben wir als eine mögliche Stammfunktion* $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. *Wenn wir dieses Beispiel weiterdenken, dann erhalten wir für* $f(x) = x^n$ *aus der Regel*

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Für reelle Koeffizienten ergeben sich gleiche Regeln mit entsprechenden Einschränkungen an x.

Beispiel 7.2.
Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. *Wir haben nach Sektion 6.4, daß* $(\log(|x|))' = \frac{1}{x}$. *Als eine Stammfunktion von* f *erhalten wir also*

$$F(x) = \log(|x|).$$

Definition 7.2 (Unbestimmtes Integral)**.**
*Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ und F eine **Stammfunktion** von f. Das **unbestimmte Integral** von f, in Zeichen $\int f \,\mathrm{d}x$, ist definiert durch*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c\colon\ c \in \mathbb{R}\}\,.$$

Schreibweise: Wenn wir das bestimmte Integral einer Funktion angeben wollen, dann schreiben wir einfach

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

für eine Stammfunktion F von f. Die Konstante C ist dabei unbestimmt und heißt **Integrationskonstante**.

Mit dieser Schreibweise gilt wegen $F' = f$ dann

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x).$$

Dies rechtfertigt die von manchen benutzte Sprechweise von **Aufleitung** für die Stammfunktion im Geiste des Englischen **anti-derivative**; wir werden diese Bezeichnung nicht verwenden und nur von Stammfunktionen und unbestimmten Integralen sprechen. Weiterhin schreiben wir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$$

anstelle des weniger eleganten (wenn auch eher korrektem)

$$\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

7.2 Unbestimmte Integrale von Grundfunktionen

Funktion	Unbestimmtes Integral ($c \in \mathbb{R}$)
0	c,
x^α, $\alpha \neq -1$, $x > 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
e^x	$e^x + c$
a^x, $a \in (0, \infty)\backslash\{1\}$	$\frac{a^x}{\log(a)} + c$
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\log(\lvert x \rvert) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$	$\arcsin(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

Bemerkung 7.3.
Die Regel

$$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$$

gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und für $\alpha \in -\mathbb{N}$ für $x \neq 0$. Wenn $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}\}$, dann gilt die Regel für $x > 0$.

7.3 Summenregel des unbestimmten Integrals

Für $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar gilt $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien f, g also nun so, daß Stammfunktionen F, G existieren. Nach der Summenregel für Ableitungen ist $\alpha F + \beta G$ eine Stammfunktion von $\alpha f + \beta g$.

Damit haben wir mit der vorhin eingeführten Notation

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathsf{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathsf{d}x + \beta \int g(x)\,\mathsf{d}x$$

bzw.

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathsf{d}x = \alpha F + \beta G + c.$$

Beispiel 7.3.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin(x) + 2x^3$. Die Stammfunktion ist dann also

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathsf{d}x &= \int \left(2\sin(x) + 2x^3\right)\,\mathsf{d}x \\
&= 2\int \sin(x)\,\mathsf{d}x + 2\int x^3\,\mathsf{d}x \\
&= -2\cos(x) + 2\left(\frac{1}{4}x^4\right) \\
&= -2\cos(x) + \frac{1}{2}x^4 + c.
\end{aligned}$$

7.4 Die Substitutionsregel

Wir überlegen uns zuerst eine einfache Instanz der sog. Substitutionsregel. Dabei beginnen wir mit der folgenden Beobachtung: sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und F eine Stammfunktion von f haben, dann gilt

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = af(ax+b)$$

für alle $x \in J$ wobei $ax+b \in I$ für alle $x \in I$; $a, b \in \mathbb{R}$ fix. Damit erhalten wir die Regel

$$\int f(ax+b)\,\mathsf{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Beispiel 7.4.
Wir wollen

$$\int \sqrt{2x-1}\,\mathsf{d}x$$

berechnen. Natürlich ist das nur für $x \geq -\frac{1}{2}$ sinnvoll. Nach der oben genannten Regel folgt

$$\int \sqrt{2x-1}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{3}\underbrace{\sqrt{(2x-1)^3}}_{=(2x-1)\sqrt{2x-1}} + c$$

da $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$ eine Stammfunktion von $\sqrt{x}$ ist.

Mit dieser Vorrede: Die Substitutionsregel kann als Umkehrung der Kettenregel verstanden werden. Wenn $f\colon J \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to J$, $g(I) \subseteq J$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ differenzierbar und es gilt für $y = f \circ g(x) = f(g(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Formal haben wir dann

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(y)\mathrm{d}y = f + C$$

wobei $y = g(x)$, $\mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x$.

Bevor wir das präzisieren und beweisen schauen wir uns ein Beispiel an.

Beispiel 7.5.
Wir wollen das Integral

$$\int x^3\sqrt{3x^4-1}\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Mit ein wenig Training erkennt man, daß, es sich hier um eine Kettenregel handelt da

$$\sqrt{3x^4-1}\cdot 12x^3 = f'(g(x))g'(x). \tag{7.4.1}$$

Die Konstanten für g' sind nicht korrekt aber wir können natürlich

$$\int x^3\sqrt{3x^4-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int 12x^3\sqrt{3x^4-1}\,\mathrm{d}x$$

schreiben. Das wir Konstanten aus dem Integral ziehen können hatten wir in der letzten Sektion gesehen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{3x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(3x^4-1\right)^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{(3x^4-1)^3}}{18} + c.\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 7.1 (Substitutionsregel)**.**
Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(I) \subseteq J$ sowie $f\colon J \to \mathbb{R}$. Wenn eine Stammfunktion $F\colon J \to \mathbb{R}$ von f existiert, dann gilt

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{7.4.2}$$

Beweis. Es sei also F eine Stammfunktion von f. Dann gilt, da g differenzierbar ist,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Damit ist also $F \circ g$ eine Stammfunktion des Integranden und wir haben die Regel gezeigt. □

Bevor wir dazu kommen uns weitere numerische Beispiele anzusehen noch zwei Spezialfälle: Der erste ist eine Verallgemeinerung des unbestimmten Integrals $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Vorgelegt sei ein Integral der Form

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

für ein differenzierbares $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ für $x \in I$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{d}{dx}\log(|f(x)|)\,\mathrm{d}x = \log(|f(x)|) + c.\end{aligned}$$

Die letzte Zeile Folge, da

$$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

von der Form

$$\int h'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

wobei $h(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = f(x)$ ist. Da nach Beispiel 7.2 eine Stammfunktion von h gleich $H(x) = \log(|x|)$ ist, erhalten wir das obige Ergebnis.

Beispiel 7.6.
Betrachten wir das Integral

$$\int \frac{12x^2 + 8x + 6}{2x^3 + 2x^2 + 3x + 1}\mathrm{d}x.$$

Wenn wir

$$\int \frac{12x^2 + 8x + 6}{2x^3 + 2x^2 + 3x + 1}\mathrm{d}x = 2\int \frac{6x^2 + 4x + 3}{2x^3 + 2x^2 + 3x + 1}\mathrm{d}x$$

schreiben, dann sehen wir die Form $\int \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}x$ *und erhalten*

$$\int \frac{12x^2 + 8x + 6}{2x^3 + 2x^2 + 3x + 1}\mathrm{d}x = 2\log(\left|2x^3 + 2x^2 + 3x + 1\right|) + c.$$

Der zweite Spezialfall den wir uns ansehen wollen ist eine Verallgemeinerung des Integrals $\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ dieses ist von der Form

$$\int f'(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Wir wollen uns gleich das allgemeinere Integral

$$\int (f(x))^n f'(x)\,\mathrm{d}x$$

anschauen: mit (7.4.2) bekommt man

$$\int f'(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + c.$$

Durch Differentiation der rechten Seite kann man das Ergebnis auch prüfen, wenn man das Ergebnis nicht sieht.

Beispiel 7.7.
Wir betrachten das Integral

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.3}$$

wir erhalten also sofort nach der obigen Formel

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x) + c.$$

Für

$$\int \cos^n(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \cos^n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\int \cos^n(x)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x) + c.\end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir die Formel (7.4.2) von links nach rechts gelesen. Allerdings kann man auch von rechts nach links lesen:

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Was ist damit gemeint? Manchmal haben wir ein Integral wie

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(ax)^2}.$$

Mit einem Blick in die Liste der Grundintegrale, sollte dieses Integral im wesentlichen arctan ergeben. Dieses Integral fällt mit unseren bisherigen Betrachtungen noch immer in die Klasse $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$ da wir $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $g(x) = ax$ wählen können. Damit haben wir dann, mit besagtem Blick in die Tafel der Grundintegrale

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(ax)^2} &= \frac{1}{a}\int \frac{a\mathrm{d}x}{1+(ax)^2}\\ &= \frac{1}{a}\arctan(ax) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wir wollen dieses Integral jetzt leicht anders betrachten und durch Substitution (was wir bis jetzt auch aber indirekt getan haben) lösen: Es sieht so aus, als sollte man mit $y = g(x) = ax$, $\mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x = a\mathrm{d}x$ haben

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(ax)^2} &= \int \frac{1}{1+y^2}\frac{\mathrm{d}y}{a} = \frac{1}{a}\arctan(y) + c\\ &= \frac{1}{a}\arctan(ax) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Das $y = g(x)$ ist die innere Funktion. Es gibt kein allgemeines Kochrezept, mit der man die passende Substitution finden kann. **Mit Erfahrung lernt man zu sehen, was nach innerer Funktion aussieht und substituiert das entsprechend**. Beispielsweise

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral ist nicht offensichtlich von der Form $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$. Dennoch können wir die Formel (7.4.2) zum lösen verwenden. Wenn wir dieses Integral einen Moment lang scharf anschauen, dann erscheint $y = g(x) = e^x + 1$ die **innere Funktion** in einer Stammfunktion zu sein und man erwartet, daß ein Logarithmus eine Rolle spielt. Es ist klar, daß $\log(|e^x + 1|) + c$ nicht ganz die Lösung ist aber es ist auch nicht **weit weg**, was auch immer das heißt. Versuchen wir (7.4.2):

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y-2}{y(y-1)}\,\mathrm{d}y$$

mit $y = g(x) = e^x + 1$, $\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}x$ und dann $e^x - 1 = y - 2$. Dann gilt

$$\int \frac{y-2}{y(y-1)}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y = \int \frac{2\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y-1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{2\mathrm{d}y}{y} &= 2\log(|y|)\\ &= 2\log(e^x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{und}\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} &= \log(|y-1|)\\ &= \log(e^x) + c = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathsf{d}x = 2\log(e^x + 1) - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Unsere Intuition über die innere Funktion war also nicht far off. Manchmal sieht man das Integral auch auf folgende Weise gelöst: $y = g(x) = e^x$ und $\mathsf{d}y = e^x \mathsf{d}x$ also $\mathsf{d}x = \frac{\mathsf{d}y}{y}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathsf{d}x &= \int \frac{y - 1}{y(y+1)}\,\mathsf{d}y \\
&= \int \left(\frac{2}{y+1} - \frac{1}{y}\right)\,\mathsf{d}y \\
&= 2\log(|y+1|) - \log(|y|) \\
&= 2\log(|e^x + 1|) - \log(|e^x|) + c \\
&= 2\log(e^x + 1) - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Wir können auch unsere vorher betrachteten Integrale in diesem Lichte sehen. Nur um klarzustellen, daß wir nichts neues gemacht haben: beispielsweise

$$\int x\sqrt{x^2 + 4}\,\mathsf{d}x.$$

Hier ist die innere Funktion offensichtlich $y = x^2 + 4$ und damit $\mathsf{d}y = 2x\mathsf{d}x$. Also

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2+4}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{g(x)}g'(x)\,\mathsf{d}x = \int \sqrt{y}\frac{\mathsf{d}y}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \\
= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4)^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Wie zu Anfang erläutert ist es hier jedoch oft klar, was zu integrieren ist, wenn man die Struktur des Integrals erkennt und eine direkte 'Substitution' ist nicht nötig!

Noch ein schwieriges

Beispiel 7.8.
Wir betrachten das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad |x| < |a|.$$

Als erstes haben wir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

Jetzt setzen wir die Substitution $\frac{x}{a} = \sin(y)$ *an. Damit erhalten wir*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a\cos(y)}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} \,\mathrm{d}y = \int \frac{\cos(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}.$$

Wir benutzen den trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ *und erhalten*

$$\int \frac{\cos(y)}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} \,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y = y$$

Also

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sie müssen diese Substitution nicht selbst finden (obwohl man sie sich erklären kann). Schauen Sie in ihre Formelsammlung und versuchen Sie nachzuvollziehen, wie Sie die Aufgabe nur mit dieser gelöst hätten.

Übungsaufgabe 7.1.
Berechnen Sie das Integral

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Hinweis: *Betrachten Sie die Fälle* $\alpha = \beta$ *und* $\alpha \neq \beta$ *getrennt. Sie werden* *trigonometrische Identitäten wie*

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

brauchen.

7.5 Partielle Integration

Eine weitere wichtige Regel der Differentialrechnung ist die Produktregel. Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Folglich kann man ein Integral der Art

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

durch

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))\,\mathrm{d}x &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

also

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = fg - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ausrechnen. Das auf der rechten Seite noch immer ein Integral vorkommt erklärt den partiellen Teil in **partieller Integration**. Natürlich steht nicht a priori fest, welche der Funktionen in einem Produkt als Ableitung zu sehen ist. Es gibt allerdings die einfach Faustegel, daß man sich im Kopf schnell das zweite Integral überlegt und entscheidet, ob dieses einfacher ist. Beispielsweise ist für das Integral

$$\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$$

das Integral

$$\int x e^x\,\mathrm{d}x,$$

also die Wahl $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$ einfacher als

$$\int x^3 e^x\,\mathrm{d}x,$$

also die Wahl $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$. Beim ersten Integral überlegt man sich dann sofort, daß eine zweite Anwendung der partiellen Integration auf

$$\int e^x \, \mathsf{d}x = e^x + C$$

führt womit wir das Integral sicher berechnen können. Das zweite Integral führt nur zu Schmerzen. Also nochmal langsam:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, \mathsf{d}x &= x^2 e^x - \int (x^2)' e^x \, \mathsf{d}x \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathsf{d}x \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int (x)' e^x \, \mathsf{d}x \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Versuchen Sie beim nachvollziehen ein bißchen was im Kopf zu machen; insbesondere sollten sie bei allen Beispielen im Kopf abschätzen, welche Wahl vielleicht gut wäre. Immer wieder sehe ich Studierende die sich die g und f explizit aufschreiben und dann damit anfangen umzugehen. Nun kann man das zwar machen, die Ableitungen und Stammfunktionen sind jedoch hier im Normalfall so einfach, daß man das im Kopf können sollte. Alles eine Frage der Übung!

Damit haben wir sofort, daß für Integrale der Form $\int p(x)e^x \, \mathsf{d}x$, mit p ein Polynom vom Grade n, die n-fache Anwendung partieller Integration zum Ziel führt.

Betrachten wir einen weiteres wichtiges Integral

$$\int \sin(x) e^x \, \mathsf{d}x.$$

Bevor Sie weiterlesen, überlegen Sie sich, wie Sie dieses Integral mittels partieller Integration lösen können.

Man überlegt sich leicht, daß die erste Anwendung

$$\int \cos(s)e^x \, \mathrm{d}x$$

bringt und man eine weitere partielle Integration durchführen muß. Diese bringt dann

$$\int \sin(x)e^x \, \mathrm{d}x.$$

Man kann hoffen, daß man das letzte Integral auf die linke Seite bringen kann und damit das ursprüngliche Integral gelöst hat. Man bemerke, daß die Wahl f und g' hier keine Rolle spielt.
Genauer:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)e^x \, \mathrm{d}x &= \sin(x)e^x - \int (\sin(x))' e^x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x + \int (\cos(x))' e^x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$2 \int \sin(x)e^x \, \mathrm{d}x = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x$$

also

$$\int \sin(x)e^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\sin(x) - \cos(x)\right) e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Übungsaufgabe 7.2.
Benutzen Sie die erarbeitete Intuition (und Wissen) um das Integral

$$\int x^2 \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

zu berechnen. Das Resultat ist

$$\int x^2 \cos(x) \, \mathrm{d}x = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir fassen zusammen

Satz 7.2 (Partielle Integration (integration by parts))**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Wenn das Integral $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, dann existiert auch $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ und es gilt

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 7.4.
Wir können manchmal mehr als eine Methode anwenden um ein Vorgelegtes Integral zu lösen. So kann das Integral $\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ *auch durch partielle Integration gelöst werden:*

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x &= \sin^2(x) - \int (\sin(x))' \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Also

$$\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man kann die partielle Integration auch in Fällen anwenden, wenn es nicht offensichtlich zwei Funktionen gibt. Dazu betrachten wir die Beispiele

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x,\ x > 0 \qquad \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dabei müssen wir bemerken, daß $\log(x) = 1 \cdot \log(x)$ und $\arctan(x) = 1 \cdot \arctan(x)$ gilt. Wir betrachten dann $f(x) = \log(x), \arctan(x)$ und $g'(x) = 1$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\int \log(x)\,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \log(x) \\ &= x\log(x) - \int x(\log(x))'\,\mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise gilt

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \arctan(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\arctan(x) - \int x(\arctan(x))'\,\mathrm{d}x \\ &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das Integral $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ hat die Form $\int \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}x$ und kann damit mit Substitution behandelt werden:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\log(|x^2+1|)\\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1)\\ &= \log(\sqrt{1+x^2})+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir endlich

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \log(\sqrt{1+x^2}) + C.$$

Wir berechnen $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ nochmal konkret mit Substitution: Sei $y = 1+x^2$, $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$. Dann gilt nach (7.4.2):

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{1}{2}\log(|y|)+C\\ &= \log(\sqrt{1+x^2})+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es ist klar, daß Integrationsmethoden auch zusammen in einem Integral auftreten können. Betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^3\sqrt{x^2+1}}_{x^2\cdot x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int x^2\cdot(2x)\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\int (x^2)'\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int 2x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}\\ &= \frac{1}{15}(3x^2-2)(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

7.6 Das bestimmte Integral und Flächen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Weiter sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir wollen nun eine Funktion F finden, für die $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt; also eine Stammfunktion F von f. Bisher hatten wir ja nur Ableitungstafeln von rechts nach links statt von links nach rechts gelesen und damit ein paar neue Integrale berechnet. Nun wollen wir sehen, was eine Stammfunktion eigentlich ist.

In dieser Sektion benutzen wir unsere geometrische Intuition. Präzisere Begriff folgen in späteren Kapiteln. Wir nehmen an, daß $f \geq 0$ (d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$). Die Funktion F sei definiert als das Numerische Maß der Fläche unter der Kurve $y = f(z)$ für $a \leq z \leq x$. (Ob man diese überhaupt bestimmen kann, sei mal dahingestellt. Siehe dazu Kapitel 8) Es gilt nach Definition $F(a) = 0$.

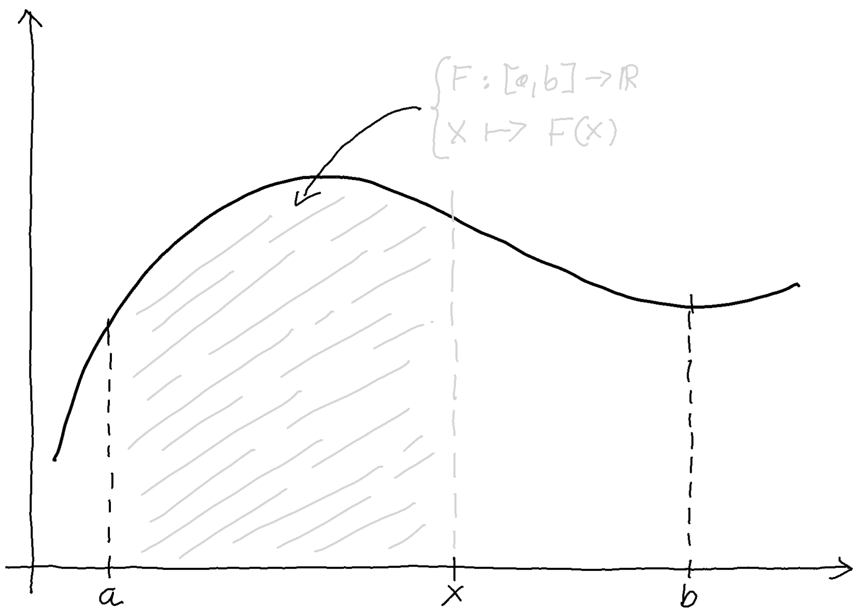


Abbildung 7.1: Dargestellt ist eine stetige Funktion f und ihre Stammfunktion F als Maß der schraffierten Fläche. Siehe Satz 8.6.

Wir zeigen

Satz 7.3.
Die Funktion F ist differenzierbar und ihre Ableitung ist f.

Beweis. Da wir uns bei der Definition von F auf geometrische Anschauung (siehe Abbildung 7.6) gestützt haben, ist der Beweis dieses Satzes natürlich geometrisch, da wir F geometrisch definiert haben. Wir betrachten zuerst den Differenzenquotienten von F

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

für $x \neq b$ und $h > 0$. Dann ist $F(x+h) - F(x)$ per Definition von F die Fläche unter der Kurve zwischen x und $x + h$.
Die Zahl $F(x+h) - F(x)$ ist die Fläche unter der Kurve zwischen x und $x+h$. Da f stetig ist, nimmt sie nach dem Satz von Weierstraß ihr Maximum und Minimum auf $[x, x+h] \subseteq [a, b]$ an. Seien $c \in [x, x+h]$ eine Stelle an der f ihr Maximum annimmt und $d \in [x, x+h]$ ein Stelle an dem f ihr Minimum annimmt. Dann gilt

$$f(d) \leq f(z) \leq f(c) \quad \text{für alle} \quad z \in [x, x+h].$$

Die Fläche unter der Kurve ist nicht kleiner als die Fläche in dem Rechteck mit Höhe $f(d)$ und Länge h; siehe Abbildung 7.6. Weiterhin ist die Fläche unter der Kurve nicht größer als die Fläche des Rechtecks mit Höhe $f(c)$ und Breite h. Damit gilt

$$hf(d) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(c)$$

und, da $h > 0$

$$f(d) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(c).$$

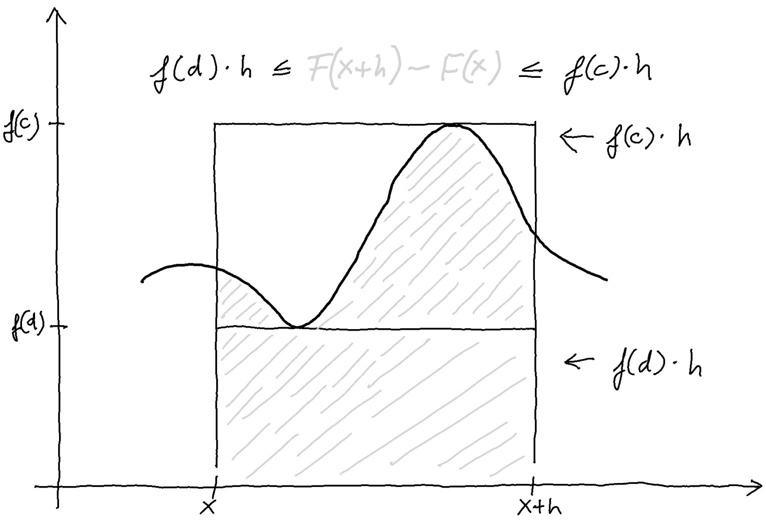


Abbildung 7.2: Illustration Beweiselement $hf(d) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(c)$.

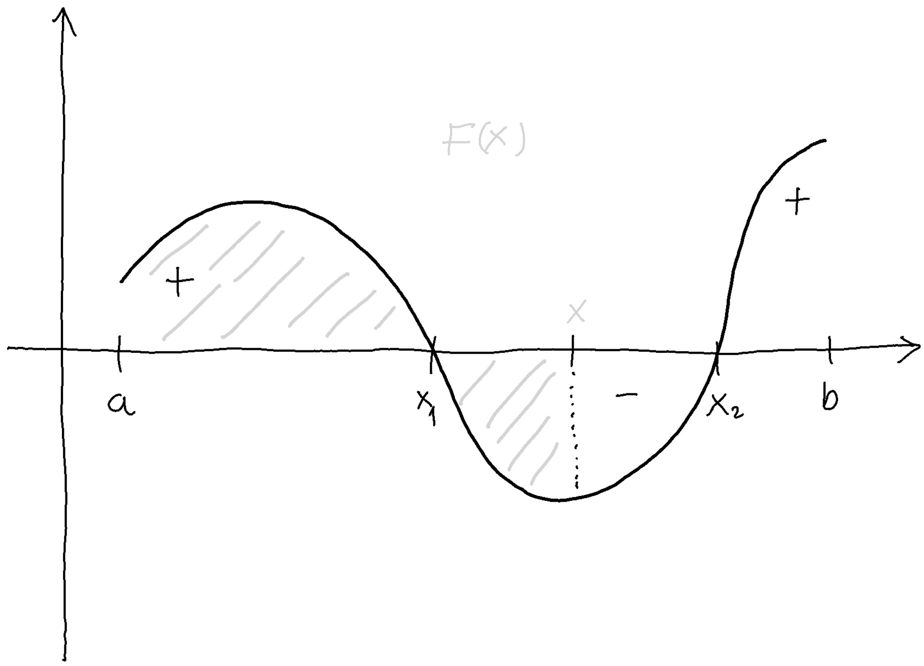
Da f stetig ist gilt mit $h \to 0$, daß $f(d), f(c) \to f(x)$. Folglich $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x)$. Damit ist der Beweis für $h > 0$ erbracht und der Beweis für $h < 0$ folgt entlang gleichartiger Argumente (Übung!). Für $x = b$ betrachten wir nur $h < 0$ und das Argument ist im wesentlichen wieder das gleiche wie oben. □

Bemerkung 7.5.
Angenommen wir können eine Funktion G raten, die Stammfunktion von f ist. Dann existiert, wie wir am Anfang des Kapitels festgestellt haben, ein C mit

$$F(x) = G(x) + C.$$

Für $x = a$ folgt $0 = F(a) = G(a) + C$, also $C = -G(a)$. Mit $x = b$ folgt also $F(b) = G(b) - G(a)$ und damit, daß die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ gleich $G(b) - G(a)$ ist. Dieser Sachverhalt ist in Rechnungen extrem nützlich.

Für stetige f die im Intervall $[a, b]$ negative Werte annehmen, können wir noch immer mit unserer Flächendefinition arbeiten. Wir müssen F aber als Minus die Fläche unter der Kurve (zwischen Kurve und x-Achse) ansetzen. Im Bild ist $F(x)$ die Fläche unter der Kurve zwischen a und x_1 Minus die Fläche unter der Kurve zwischen x_1 und x. Wir müssen $F' = f$ erfüllen.



Schreibweise: Wir Schreiben

$$F(x) =: \int_a^x f(y) \left(\mathrm{d}y, \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \right) \tag{7.6.1}$$

bzw.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$

Dieser Zusammenhang wird oft **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung** genannt.

Die obigen Betrachtungen sind natürlich nicht ganz vollständig da die Existenz der Zuordnung $x \mapsto F(x)$ nicht gezeigt sondern vorausgesetzt ist. Die rigorose Konstruktion dieser Zuordnung kann in Kapitel 8 gefunden werden.

Wenn man eine Konstruktion für die Flächenfunktion gefunden hat, dann rechtfertigt dies nich nur die obigen Diskussionen als vollständig sondern nach dem folgenden Satz ist die Interpretation als Flächenfunktion die einzig mögliche.

Satz 7.4.
Seien $a, d \in \mathbb{R}$, $a < d$ und sei $f\colon [a,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen, es existiert die Zuordnung $I \times I \to \mathbb{R}$, $(b,c) \mapsto \mathcal{I}_b^c(f)$ für $b \leq c$ mit den Eigenschaften:

(i) Wenn m, M reelle Zahlen mit

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{für alle} \quad x \in [b,c],$$

dann

$$m(c-b) \leq \mathcal{I}_b^c(f) \leq M(b-c).$$

(ii) Es gilt

$$\mathcal{I}_a^b + \mathcal{I}_b^c = \mathcal{I}_a^c(f).$$

Dann ist die Funktion $x \mapsto \mathcal{I}_a^x(f)$ differenzierbar auf dem Intervall $[a,d]$ und ihre Ableitung im Punkt x ist $f(x)$. Eine Zuordnung wie die obige ist eindeutig bestimmt.

7.7 Eigenschaften bestimmter Integrale

Satz 7.5 (Rechenregeln best. Integrale)**.**
Es sei $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.
Dann gilt

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Für alle $a < c < b$ gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) Wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \quad \textit{(Monotonie)}$$

(iv) Es gilt die Abschätzung

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Bemerkung 7.6.
Aus den obigen Eigenschaften folgt für (stückweise) stetige $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ insbesondere

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

für $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.

Bemerkung 7.7.
Da $\pm f(x) \leq |f(x)|$ gilt, folgt die Dreiecksungleichung für Integrale

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Stammfunktion (7.6.1) erhalten wir ohne Mühe

Satz 7.6 (Mittelwertsatz für Integrale)**.**
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

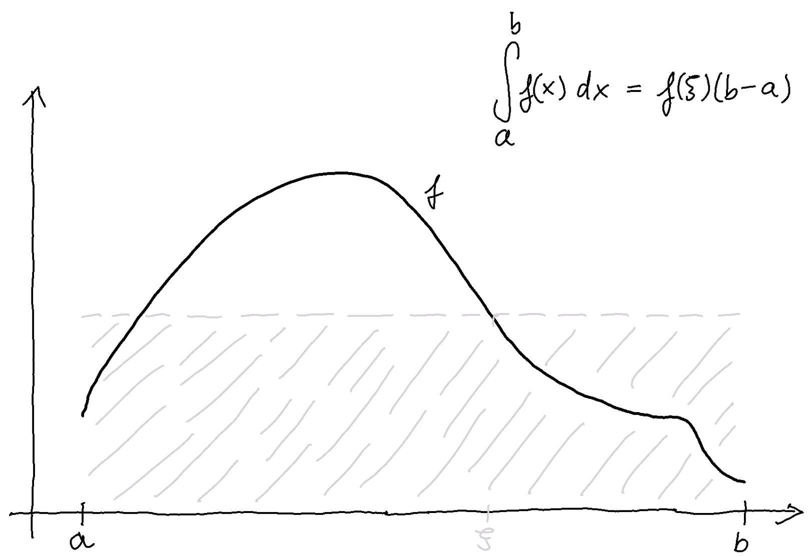


Abbildung 7.3: Illustration des Mittelwertsatzes für Integrale.

7.8 Substitutionsmethode für bestimmte Integrale

Wir formulieren die Substitutionsregel für bestimmte Integrale:

Satz 7.7 (Integration durch Substitution)**.**
Sei $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ *sei stetig differenzierbar auf* $[a,b]$. *Dann gilt*

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathsf{d}x = \int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\mathsf{d}x.$$

Beweis. Da f stetig ist und g differenzierbar, haben wir $f \circ g$ ist stetig. Da g' stetig und das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, ist auch $f \circ g \cdot g'$ stetig. Sei nun F eine Stammfunktion von f, dann ist $F \circ g$ differenzierbar und nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{\mathsf{d}x}F(g(x)) = f(g(x))g'(x)\mathsf{d}x.$$

Damit haben wir dann

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathsf{d}x = \int\limits_a^b \frac{d}{dx}F(g(x))\,\mathsf{d}x.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int\limits_a^b \frac{d}{dx}F(g(x))\,\mathsf{d}x = F(g(b)) - F(g(a)) = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathsf{d}x.$$

Damit ist der Beweis erbracht. □

Beispiel 7.9.
Wir wollen das Integral

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnen.
Wir haben

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi)} x\,\mathrm{d}x = 0$$

da $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

Beispiel 7.10.
Wir berechnen das Integral $\int_2^4 \sqrt{1-(x-3)^2}\mathrm{d}x$. *Als erstes führen wir die offensichtliche (wirklich?) Substitution* $y = x - 3$, *aus und erhalten*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Hier lassen wir uns von Beispiel 7.8 inspirieren und substituieren $y = \sin(t)$ *mit* $\mathrm{d}y = \cos(t)\mathrm{d}t$. *Wir beschränken uns auf das Intervall* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *auf dem* $\sin$ *eindeutig umkehrbar ist und die Grenzen* $y_1 = -1$ *und* $y_2 = 1$ *entsprechen* $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ *und* $t_2 = \frac{\pi}{2}$. *Auf diesem Integral gilt weiter* $\cos(t) \geq 0$ *womit wir*

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t) \quad \textit{(Trig. Pythagoras)}$$

setzen dürfen. Man erhält

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

die Leserin möge im unbestimmten Integral die Rücksubstitutionen durchführen und sich vergegenwärtigen, daß es sich lohnt nicht immer erst das unbestimmte Integral zu berechnen. Es lohnt sich zu üben!

7.9 Partielle Integration für bestimmte Integrale

Natürlich gilt auch die Regel der partiellen Integration für bestimmte Integrale.

Satz 7.8 (Partielle Integration)**.**
Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar.*
Dann gilt

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 7.11.
Wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{-\sin(x)\cos(x)\Big|_0^\pi}_{=0} + \int\limits_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^\pi (1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \pi - \int\limits_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

also

$$\int\limits_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

7.10 Uneigentliche Integrale

Wenn die Grenzen den Integrals $\pm\infty$ sind oder der Integrand Singularitäten auf dem Definitionsbereich hat, dann ist das Integral ein uneigentliches. Diese können, müssen aber nicht konvergieren. Wir betrachten insgesamt drei Fälle uneigentlicher Integrale.

Definition 7.3 (Uneigentliches Integral I)**.**
Sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, so heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

auf analoge Weise ist das Integral $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ für stetige Funktionen $f\colon (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ definiert.

Beispiel 7.12.
Wir wollen das Integral $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ untersuchen. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ist stetig auf $[1,\infty)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir haben für $\alpha > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\bigg|_a^R \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{R^{\alpha-1}}\right).\end{aligned}$$

Da wir

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\alpha-1}} = 0, \tag{7.10.1}$$

haben wir

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \qquad \alpha > 1.$$

Übungsaufgabe 7.3.

Zeigen Sie, daß das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *für* $\alpha \leq 1$ *nicht konvergiert.*

Definition 7.4 (Uneigentliches Integral II)**.**

Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Falls der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, dann heißt das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent und wir setzen*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 7.13.

Wir wollen das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *für* $\alpha \leq 1$ *untersuchen. Der Integrand ist stetig auf* $[\varepsilon, 1]$ *für alle* $\varepsilon > 0$*. Wir berechnen*

$$\begin{aligned}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\bigg|_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}).\end{aligned}$$

Da wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{1-\alpha} = 0, \tag{7.10.2}$$

haben wir

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \qquad \alpha < 1.$$

Übungsaufgabe 7.4.

Zeigen Sie, daß das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *für* $\alpha \geq 1$ *nicht konvergiert.*

Definition 7.5 (Uneigentliches Integral III)**.**
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *eine stetige Funktion. Sei* $c \in (a,b)$ *beliebig. Falls die uneigentlichen Integrale*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to b-} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergieren, dann heißt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent und wir setzen*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.10.3}$$

Beispiel 7.14.

Nach den vorigen Betrachtungen divergiert das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiel 7.15.
Wir untersuchen das Integral $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. *Wir haben*

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname{arcsin}(-1+\varepsilon) \\ &= -(-\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname{arcsin}(1-\varepsilon) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Siehe Sektion 6.11 für die Stammfunktionen.

Beispiel 7.16.

Wir betrachten das Integral $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Wir haben*

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{7.10.4}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2} \tag{7.10.5}$$

und

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{7.10.6}$$

$$= -\lim_{R\to\infty} \arctan(-R) = -(-\frac{\pi}{2}). \tag{7.10.7}$$

Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= \pi$$

Es sei angemerkt, daß das Integral nicht durch

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

definiert ist sondern stets die beiden Seiten getrennt betrachtet werden müssen.
Hier ist das zwar künstlich, da die Funktion symmetrisch ist, aber wir wollen erst keine falschen Vorstellungen aufkommen lassen.

Beispielsweise gilt

$$\lim_{R\to\infty} \Big(\int\limits_{-R}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{R} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Big) = 0.$$

Das heißt nicht, daß $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ *oder* $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ *konvergiert. Sie konvergieren beide nicht! Der Nachweis bleibt der Leserin überlassen. Siehe auch Aufgabe 7.3.*

Definition 7.6 (Absolute Konvergenz)**.**
Das uneigentliche Integral $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *heißt genau dann* ***absolut konvergent****, wenn das Integral* $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *konvergiert.*

7.11 Integration rationaler Funktionen

Erinnerung: Rationale Funktionen sind von der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$ erhält man mittels Polynomdivision eine Zerlegung

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)},$$

mit Polynomen s und t, wobei $\deg(t) < \deg(q)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int s(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{t(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Integration von s ist einfach, daher konzentrieren wir uns auf den 'echt' gebrochen rationalen Anteil $\frac{t}{q}$.
Für die Integration des echt gebrochen rationalen Anteils benötigt man eine sogenannte **Partialbruchzerlegung**. Dafür beschafft man sich zunächst die Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$\begin{aligned} q(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\ &= a_n \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{m} \left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{\nu_j}, \end{aligned} \tag{7.11.1}$$

wobei $n = \deg(q)$ und

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j + 2 \sum_{j=1}^{m} \nu_j = n$$

mit λ_j und (p_j, q_j) paarweise verschieden.

Für die Integration noch günstiger schreibt man (7.11.1) mittels quadratischer Ergänzung als:

$$q(x) = a_n \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{m} \left((x - \alpha_j)^2 + \beta_j\right)^{\nu_j}.$$

Der folgende Satz hilft uns nun, $g(x) := \frac{t(x)}{q(x)}$ in eine für die Integration geeignete Struktur zu bringen:

Satz 7.9.
Unter den oben gemachten Voraussetzungen und eingeführten Bezeichnungen gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen

$$\begin{array}{ll} \eta_{j,\ell} & (j = 1, 2, \dots, k,\ \ell = 1, 2, \dots, \mu_j) \\ \sigma_{j,\ell} & (j = 1, 2, \dots, m,\ \ell = 1, 2, \dots, \nu_j) \\ \tau_{j,\ell} & (j = 1, 2, \dots, m,\ \ell = 1, 2, \dots, \nu_j), \end{array}$$

*so daß g die folgende **Partialbruchzerlegung** besitzt:*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{\mu_j} \frac{\eta_{j,\ell}}{(x-\lambda_j)^\ell} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\nu_j} \frac{\sigma_{j,\ell} + \tau_{j,\ell} x}{((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2)^\ell}. \tag{7.11.2}$$

Möglicherweise finden Sie folgende Darstellung von (7.11.2) übersichtlicher:

$$\begin{aligned} g(x) \quad = \quad & \frac{\eta_{1,1}}{x-\lambda_1} + \frac{\eta_{1,2}}{(x-\lambda_1)^2} + \dots + \frac{\eta_{1,\mu_1}}{(x-\lambda_1)^{\mu_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{\eta_{k,1}}{x-\lambda_k} + \frac{\eta_{k,2}}{(x-\lambda_k)^2} + \dots + \frac{\eta_{k,\mu_k}}{(x-\lambda_k)^{\mu_k}} \\ & + \frac{\sigma_{1,1} + \tau_{1,1} x}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{\sigma_{1,2} + \tau_{1,2} x}{((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^2} + \dots + \frac{\sigma_{1,\nu_1} + \tau_{1,\nu_1} x}{((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\nu_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{\sigma_{\ell,1} + \tau_{\ell,1} x}{(x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2} + \frac{\sigma_{\ell,2} + \tau_{\ell,2} x}{((x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^2} + \dots + \frac{\sigma_{\ell,\nu_\ell} + \tau_{\ell,\nu_\ell} x}{((x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^{\nu_\ell}} \end{aligned}$$

Bemerkung 7.8.
Im konkreten Beispiel kann man auf die Doppelindizierung verzichten und für die Unbekannten $\eta_{j,t}, \sigma_{j,s}$ und $\tau_{j,s}$ eingängigere Bezeichnungen (z. B. $A, B, C, ...$) wählen.

Bei der Konstruktion einer Partialbruchzerlegung wählt man also den passenden Ansatz nach Satz 7.9 und muß dann die Koeffizienten $\eta_{j,t}$, $\sigma_{j,s}$ und $\tau_{j,s}$ bestimmen.

Dafür multipliziert man beide Seiten von (7.11.2) mit $q(x)$ und gleicht dann die Koeffizienten der links und rechts stehenden Polynome ab.

Eine noch günstigere Variante ist häufig, nach Multiplikation mit $q(x)$ genau n verschiedene Werte für x einzusetzen und das entstehende lineare Gleichungssystem zu lösen.

Eine besonders günstige Wahl für die einzusetzenden Werte sind dabei die Nullstellen λ_j von q.
Am leichtesten erlernt man die Partialbruchzerlegung anhand von Beispielen:

Übungsaufgabe 7.5.
Man bestimme eine Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x}.$$

Übungsaufgabe 7.6.
Welche Ansätze *sind für die Partialbruchzerlegungen folgender Funktionen zu wählen?*

$$g(x) = \frac{42}{x^3(x+1)^2} \quad \textit{und} \quad h(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Die Funktionen aus (7.11.2) besitzen folgende Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\, x$	
$\frac{1}{x-\lambda}$	$\log(\lvert x-\lambda\rvert)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{(x-\lambda)^k}$	$-\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\lambda)^{k-1}}$	$k \in \mathbb{N}, k > 1$
$\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
$\frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{1}{2} \log\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{\alpha}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$	

Die verbleibenden Integrale müssen rekursiv berechnet werden:

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,\mathrm{d}x \\ &\quad = \frac{-1}{2(k-1)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{k-1}} + \alpha \int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,\mathrm{d}x \\ &\quad = \frac{x-\alpha}{2(k-1)\beta^2\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\beta^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}}\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Wir fassen die Schritte zur Integration einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ noch einmal zusammen:

- Spalte mittels Polynomdivision den echt gebrochen rationalen Anteil ab:

$$f(x) = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad \deg(t) < \deg(q)$$

- Berechne für $g(x) = \frac{t(x)}{q(x)}$ eine Partialbruchzerlegung und integriere die entstehenden Summanden mit Hilfe der Formeln und Tabellen auf Seite 294. Das verbleibende Integral über s ist einfach.

Übungsaufgabe 7.7.

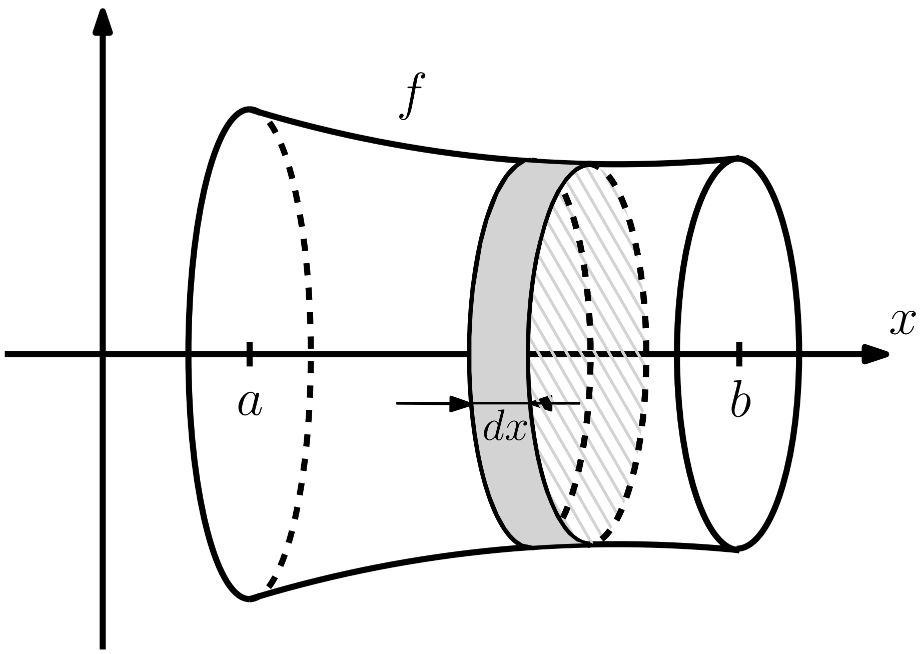
Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{2x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, \mathsf{d}x.$$

7.12 Rotationskörper

Für die Berechnung von Volumina krummflächig berandeteter Körper benötigt man eigentlich mehrdimensionale Integrale. Bei Körpern, die durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x-Achse entstehen (Kugeln, Zylinder, ...), reichen jedoch eindimensionale Integrale aus.

Man nennt solche Körper **Rotationskörper**.



Wir werden die entsprechende Formel 'herleiten': Die Größe dx wird als kleine Zahl interpretiert; das Integral als Summe (beachte stilistische Ähnlichkeit von '$\int$' und 'S'). Für das Volumen der grau markierte Scheibe gilt für sehr kleine dx

$$V_{\text{Scheibe}} \approx \pi[f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

nach der elementargeometrischen Formel für Zylinder Höhe $\times$ Grundfläche wobei der Radius durch $f(x)$ gegeben ist.

Damit ergibt sich für das Volumen V_K des Rotationskörpers

$$\begin{aligned} V_K &= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \sum_{\text{Scheibe}} V_{\text{Scheibe}} \\ &= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \sum_{\text{Scheibe}} \pi [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Natürlich steckt hinter dieser 'Herleitung' eigentlich ein Grenzwertprozeß wie in Kapitel 8. Uns soll dies aber genügen. Als Ingenieur sollten Sie in der Lage sein Herleitungen wie die obige selbst auszuführen sie werden das in Anwendungsfächern noch ein paar Mal sehen.

Übungsaufgabe 7.8.
Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Welches Volumen hat der Körper, der durch Rotation des Graphen von $f\colon [1, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, um die x-Achse entsteht?

7.13 Übungsaufgaben

Aufgabe 58

Zeigen Sie, daß die Funktion $F(x) = 5 - 2\sqrt{5 + \cos x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}$ ist.

Aufgabe 59

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^4 + 3x\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 60

Es gilt (Substitution!)

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(2x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man kann diese Integral auch anders berechnen:

$$\int 2\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int 2y\,\mathrm{d}y = \sin^2(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Dabei wurde $y = \sin(x)$ gesetzt. Aus beiden Ergebnissen zieht man den Schluß

$$\sin^2(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}.$$

Andererseits wissen wir aber, daß

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

also

$$-\frac{\cos(2x)}{2} = \sin^2(x) - \frac{1}{2}$$

gilt. Wo steckt der Fehler, der zu der falschen Schlußfolgerung

$$\sin^2(x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2}$$

führt?

Aufgabe 61

Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}}\,dx = 2\pi.$$

Hinweis: partielle Integration entfernt den Logarithmus aus dem Integranden.

Aufgabe 62

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1+2x}{1+x^2}.$$

Finden Sie eine Stammfunktion von f.

Aufgabe 63

Berechnen Sie

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

Hinweis: Zuerst partiell integrieren, dann

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

benutzen.

Aufgabe 64

Zeigen Sie, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

konvergiert. Zeigen Sie weiterhin, daß es den Wert 0 hat.

Hinweis: Die Berechnung einer Stammfunktion ist nicht zielführend, da die Stammfunktion keine elementare Funktion ist. Beachten Sie das Vorzeichen des Integranden.

Aufgabe 65

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{0}^{\pi} \cos^3(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 66

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}.$$

Aufgabe 67

Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$,

Aufgabe 68

Diskutieren Sie das Integral

$$\int \frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 69

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{e^x}{e^x+a}\,\mathrm{d}x, \quad e^x \neq a.$$

Aufgabe 70

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{\sin(x)}{a + b\cos(x)}\,\mathrm{d}x, \quad (\cos(x) \neq -\frac{a}{b}).$$

Hinweis: Suchen Sie eine geeignete Substitution. sie dürfen ein paar ausprobieren bevor Sie aufgeben. Die Fehlversuche werden Sie auch lehren.

Aufgabe 71

Berechnen sie das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}.$$

Hinweis: Spielen Sie mit geeigneten trigonometrischen Identitäten wie

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

und suchen Sie geeignete Substitutionen.

Aufgabe 72

Berechnen Sie die nachfolgenden uneigentlichen Integrale.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}$,

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-\gamma t}\,\mathrm{d}t,\ \gamma > 0$,

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^4}$,

(v) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Aufgabe 73

Konvergiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[2]{(1+x^2)(1-x)}}?$$

Aufgabe 74

Das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

kann zu π berechnet werden. Ein Studierender berechnet dieses Integral einmal auf folgende Weise: er führt die Substitution $\sin(x) = y$ durch. Dabei folgt aus $\sin(0) = 0$ und $\sin(2\pi) = 0$, daß obere und untere Grenze des neuen Integrals übereinstimmen. Man brauche daher den Integranden gar nicht erst auszurechnen, das Integral hat den Wert 0.
Wo liegt der Fehler in diesem Gedankengang?

Aufgabe 75

Ist die in Aufgabe 7.13 richtig, wenn

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

vorliegt?

Aufgabe 76

Eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ (U_0 konstant, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T Zeitdauer einer Schwingung) wird an einen Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R gelegt. Die Leistung des nun fließenden Stromes kann nach der Formel

$$N = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{(U(t))^2}{R} \, \mathrm{d}t$$

berechnet werden. Welche Spannung müßte ein Gleichstrom haben, der in dem Gleichen Stromkreis die gleiche Leistung erzeugt? (Effektivspannung U_e)

Aufgabe 77

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgende Ungleichungen:

(i) $\sin(x) \leq x$ für $x \in (0, \infty)$,

(ii) $\exp(x) > 1 + x$ für $x \in (0, \infty)$,

(iii) $1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$ für $x \in (1, \infty)$

Aufgabe 78

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels Substitution. Führen Sie für die unbestimmten Integrale eine Probe für Ihr Ergebnis durch!

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)^3}$,

(ii) $\displaystyle\int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} \, \mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} \, \mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \, \mathrm{d}x$,

(v) $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\log(x)}}{x} \, \mathrm{d}x$,

(vi) $\displaystyle\int \tan(x) \, \mathrm{d}x$,

(vii) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)} \, \mathrm{d}x$

Tip: Additionstheorem.

Aufgabe 79

Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale mittels partieller Integration.

(i) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\log(x)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_1^e \log(x)\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$,

(v) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$
Tip: Partielle Integration, dann Substitution. Wie bei unserer Berechnung der Stammfunktionen von log und arctan.

Aufgabe 80

Überprüfen Sie folgende Integrale auf Existenz und bestimmen Sie ggf. deren Wert.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\pi x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{d}x$,

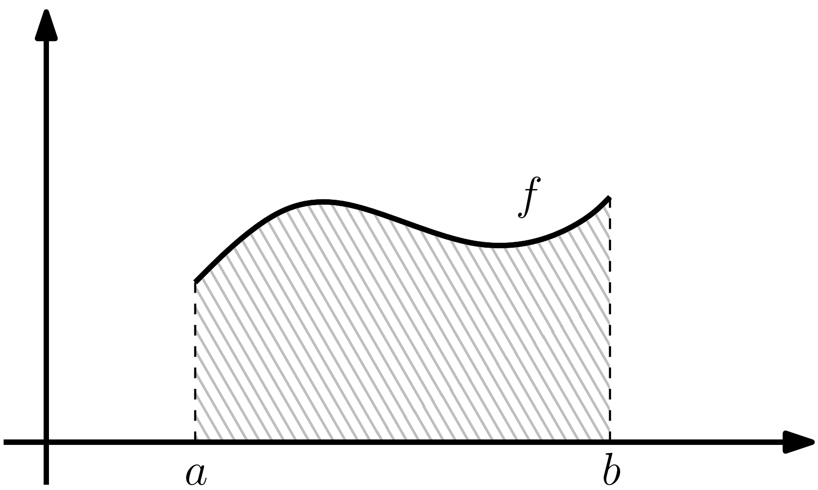
(iii) $\displaystyle\int_0^{42} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$,

(iv) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

8 Integralrechnung (Riemann)

In Kapitel 7 haben wir den Integralbegriff entwickelt indem wir angenommen haben, daß es für eine nichtnegative Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Zuordnung $x \mapsto F(x)$ gibt, die den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der Ordinatenachse angibt. In diesem Kapitel werden wir zeigen, daß eine solche Zuordnung tatsächlich existiert.

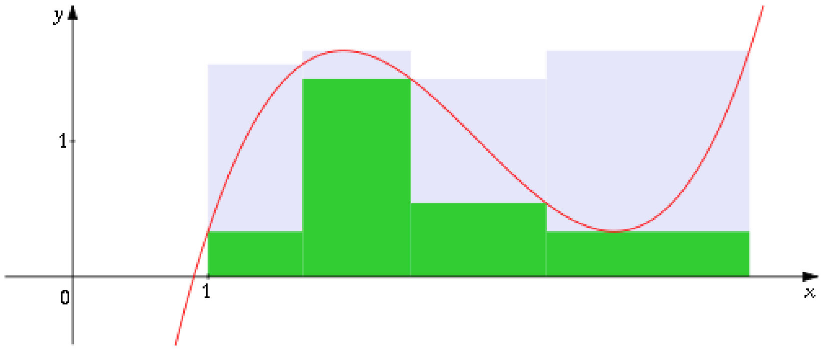
Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer beschränkten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse:



Im Allgemeinen ist die Fläche krummlinig begrenzt; Formeln für elementare geometrische Objekte scheiden also zur Lösung aus.
Das Problem ist einfach für stückweise konstante Funktionen, da sich dann der Flächeninhalt aus Rechtecken zusammensetzt.

Daher schachtelt man die Fläche unter dem Graphen von f von oben und unten mit Rechteckflächen ein und gewinnt so obere und untere Schranken.

Können sich die grauen und grünen Rechteckflächen von oben und unten beliebig weit derselben Schranke nähern, so ist diese die gesuchte Fläche.



Wir beschreiben diesen Gedankengang nun mathematisch exakt. Dazu definieren wir zuerst Treppenfunktionen.

Definition 8.1 (Treppenfunktion)**.**
*Wir nennen $t\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine **Treppenfunktion**, wenn es eine **Zerlegung***

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$ gibt, so daß t auf jedem der (offenen) Teilintervalle (x_i, x_{i+1}) konstant ist, d.h.

$$t(x) = \xi_i \quad \text{für alle } x \text{ mit} \quad x_i < x < x_{i+1}.$$

Für eine solche Treppenfunktion t setzt man

$$\int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\,(x_{i+1} - x_i). \tag{8.0.1}$$

Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ wird mit $\mathscr{T}[a,b]$ bezeichnet.

Bemerkung 8.1.

Es ist klar (wirklich?), daß Treppenfunktionen keine eindeutige Darstellung besitzen. Man muß also eigentlich zeigen, daß der Wert des Integrals nicht von der gewählten Darstellung der Treppenfunktion abhängt. Machen sie sich das klar!

Bemerkung 8.2.

Aus der Definition (8.0.1) *ergibt sich* $\int\limits_a^b t(x)\,\mathrm{d}x$ *als der* ***gewichtete Flächeninhalt*** *zwischen dem Graphen von* t *und der Ordinatenachse (*x*-Achse). Dabei werden Flächen oberhalb der* x*–Achse positiv, Flächen unterhalb der* x*-Achse negativ gewichtet.*

Übungsaufgabe 8.1.

Berechnen Sie $\int\limits_{-2}^{1} \mathsf{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-1}^{3} 2\chi_{[-1,2]}(x) - \chi_{[1,3]}(x) + 4\chi_{[[-1,1]]}(x)\,\mathrm{d}x$, *wobei* χ_I *die charakteristische Funktion des Intervalls* I *ist, d.h.* $\chi_I(x) = 1$ *genau dann, wenn* $x \in I$ *und* $\chi_I(x) = 0$ *genau dann wenn* $x \notin I$.

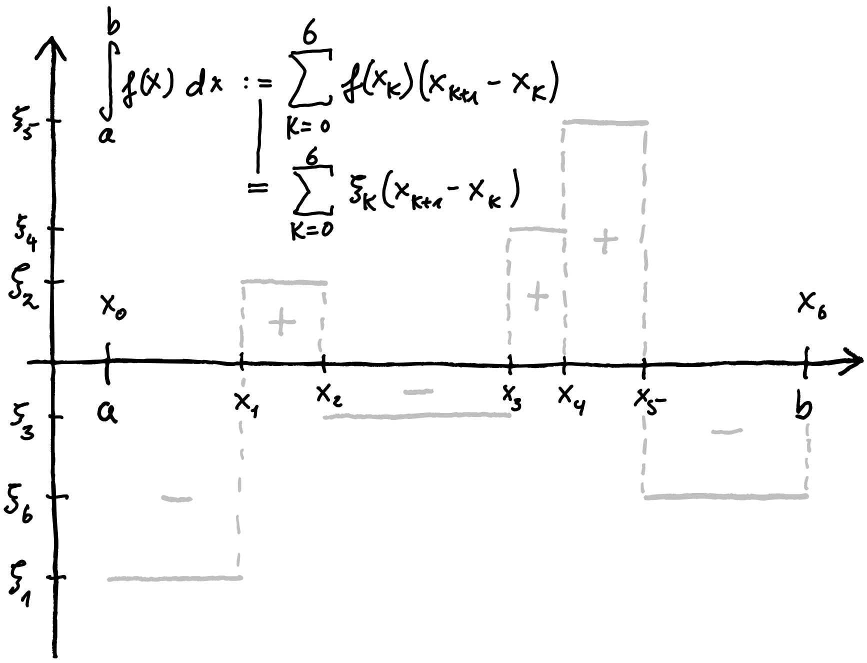


Abbildung 8.1: Illustration des Integrals für Treppenfunktionen.

Hilfssatz 8.1 (Treppenfunktionen und ihr Integral)**.**
Es seien $t, s \in \mathscr{T}[a,b]$.
Dann gilt:

(i) $\alpha t + \beta s \in \mathscr{T}[a,b]$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $t \cdot s \in \mathscr{T}[a,b]$.

(iii) $|t| \in \mathscr{T}[a,b]$.

(iv) $\max\{s,t\}, \min\{s,t\} \in \mathscr{T}[a,b]$.

(v) Es gilt

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(vi) *Wenn $s \leq t$, dann gilt*

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x. \quad \textit{(Monotonie)}$$

(vii) *Für $c \in (a,b)$ gilt*

$$\int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c t(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b t(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 8.1 (Dreiecksungleichung/Stetigkeit).
Für alle $t \in \mathscr{T}[a,b]$ gilt

$$\Big| \int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x \Big| \leq |b-a| \max_{x\in[a,b]} |t(x)|.$$

Bemerkung 8.3.
Der Beweis des Satze 8.1 is einfach, wenn man die in Bemerkung 8.1 diskutierte Unabhängigkeit des Integrals von der Darstellung annimmt.

Bemerkung 8.4.
Was ist mit Stetigkeit gemeint? Wir betrachten $\int_a^b \cdot\,\mathrm{d}x$ als Funktion von $\mathscr{T}[a,b]$ nach $\mathbb{R}$: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß

wenn $s,t \in \mathscr{T}[a,b]$ mit $\max_{x\in[a,b]} |s(x)-t(x)| < \delta$, dann

$$\Big| \underbrace{\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b t(x)\,\mathrm{d}x}_{=\int_a^b s(x)-t(x)\,\mathrm{d}x} \Big| < \varepsilon$$

In Worten: wenn die Funktionsgraphen sehr 'nahe' beieinander liegen, dann sind auch die Integrale (Zahlen in $\mathbb{R}$) nah beieinander.

Nun benutzen wir die Treppenfunktionen um Integrale für allgemeinere Funktionen zu definieren, wie wir es am Anfang des Kapitels beschrieben haben.

Zu jeder beschränkten Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ können wir nun zwei Zahlen definieren, nämlich das **Oberintegral**

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}x := \inf\left\{\int_a^b t(x)\,\mathsf{d}x \;:\; t \text{ Treppenfnkt. auf } [a,b] \text{ mit } t \geq f\right\}.$$

und das **Unterintegral**

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}x := \sup\left\{\int_a^b t(x)\,\mathsf{d}x \;:\; t \text{ Treppenfnkt. auf } [a,b] \text{ mit } t \leq f\right\}.$$

Bemerkung 8.5.
Es ist klar (wirklich?), daß das Riemann Integral einer Treppenfunktion mit der Definition (8.0.1) *übereinstimmt.*

Diese beiden Größen, daß Ober- und Unterintegral, helfen uns, die 'Einschachtelung' der Fläche unter dem Graphen von f mit Rechteckflächen mathematisch zu erfassen. Für alle (beschränkten) Funktionen gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}x.$$

Wir geben nun die Definition des Riemann-Integrals.

Definition 8.2 (Riemann-Integral)**.**
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Die Funktion f heißt genau dann Riemann-integrierbar, wenn für alle

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. In dem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diese Zahl heißt dann das ***(bestimmte) Riemann-Integral*** *von f.*
Die Zahlen a und b heißen ***Integrationsgrenzen****, f heißt* ***Integrand*** *und x die* ***Integrationsvariable****. Wir setzen die Konvention*

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0 \quad \textit{und} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

für $a < b$. Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{R}[a,b]$.

Bemerkung 8.6.
Der Name der Integrationsvariable ist nicht relevant:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Manchmal lohnt es sich, wie wir sehen werden, nicht x zu verwenden um Verwirrung zu vermeiden. Beispielsweise wenn eine der Integrationsgrenzen Variabel ist. Man kann zwar

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

ohne Probleme schreiben, da das x innerhalb des Integrals, also in $f(x)\mathrm{d}x$, nicht das gleiche ist wie in der oberen Grenze, es verwirrt aber. Besser schreibt man

$$\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

oder vergleichbares.

Definition 8.2 liefert zwar kaum Anhaltspunkte für die konkrete Berechnung von Integralen, aber bereits einige Rechenregeln mit Satz 8.1:

Satz 8.2 (Rechenregeln für die Integration I)**.**
*Für das **Riemann-Integral** gelten die folgenden Rechenregeln: Seien $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, dann*

(i) ist $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$.

(ii) ist $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathscr{R}[a,b]$.

(iii) ist $f \cdot g \in \mathscr{R}[a,b]$.

(iv) dann ist, für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, auch $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Übungsaufgabe 8.2.

Die Übertragung der Aussagen von den Treppenfunktionen zu den Riemann-integrierbaren Funktionen ist etwas technisch und wir wollen an dieser Stelle darauf verzichten.

Wenn es Sie interessiert, können Sie die entsprechenden Beweise in der Standard-Literatur zu Analysis 1 finden. Das gleiche gilt für den nächsten Satz.

Satz 8.3 (Rechenregeln für die Integration II).

Seien $f, g :: [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Dann gilt:

(i) Für alle $c \in (a, b)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \quad \textit{(Monotonie)}$$

Insbesondere folgt aus $c \leq f(x)$ bzw. $f(x) \leq C$ für alle $x \in (a, b)$:

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq C(b-a)$$

(iii) Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\Big|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Übungsaufgabe 8.3.

Interpretieren Sie die Aussagen des Theorems 8.3 graphisch.

aus der Definition des Riemann-Integrals (Definition 8.2) erhalten wir sofort die folgende Charakterisierung für Riemann-integrierbare Funktionen.

Satz 8.4 (Charakterisierung Riemann-Integrabilität)**.**
Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ Funktionen $s_1, s_2 \in \mathcal{T}[a,b]$ existieren mit $s_1 \leq f \leq s_2$ und

$$\overline{\int_a^b} s_2(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} s_1(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Der nächste Satz sagt, daß eine stetige Funktion beliebig genau durch Treppenfunktionen angenähert werden kann.

Satz 8.5 (Approximation stetiger Funktionen)**.**
Es sei $f \in C[a,b]$ (also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig). Dann Existieren für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $s_1, s_2 \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $s_1 \leq s_2$ und $\|f - s_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2$.

Mit Satz 8.4 haben wir dann sofort

Folgerung 8.1.
Sei $f \in C[a,b]$.
Dann ist f Riemann integrierbar.

Natürlich gelten auch der Mittelwertsatz (Satz 7.6) und alles weitere, was in Kapitel 7 (bzw. Abschnitt 7.6 und folgende) für bestimmte Integrale besprochen wurde, bspw. partielle Integration und Substitution. Wir haben nur noch nachgeholt, daß die in Sektion 7.6 benutze Flächenzuordnung tatsächlich möglich ist. Siehe insbesondere die Diskussion auf Seite 276. Schauen Sie auch, wie die Eigenschaften des Riemann-Integrals die wir aufgezählt haben die Voraussetzungen von Satz 7.4 erfüllen.
Auch die Diskussion in der kommenden Sektion haben wir in Abschnitt 7.6 schon diskutiert, wollen dies aber noch einmal konkret in den Kontext des Riemann-Integrals einbetten.

8.1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (HDI)** besagt, daß das Integrieren – unter gewissen Voraussetzungen und sehr grob gesprochen – die ‘Umkehrung’ des Differenzierens ist. Er beantworte auch die Frage nach dem Zusammenhang von unbestimmten, bestimmten Integral und Stammfunktion.

Das Ergebnis ist so berühmt und wichtig, daß es sogar eine Vertonung als Kantate gibt.[1]. Eine schöne Aufführung von Würzburger Gymnasiasten inklusive animierter Skizzen finden Sie hier.

Satz 8.6 (HDI, Teil I).
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist die durch

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

definierte Funktion F in $[a,b]$ differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y\right) = f(x).$$

Nach Satz 7.4 liefert das Riemannsche Integral also genau die Zuordnung $x \mapsto F(x)$, die wir in Sektion 7.6 verwendet haben.

[1] F. Wille, 1935-1992

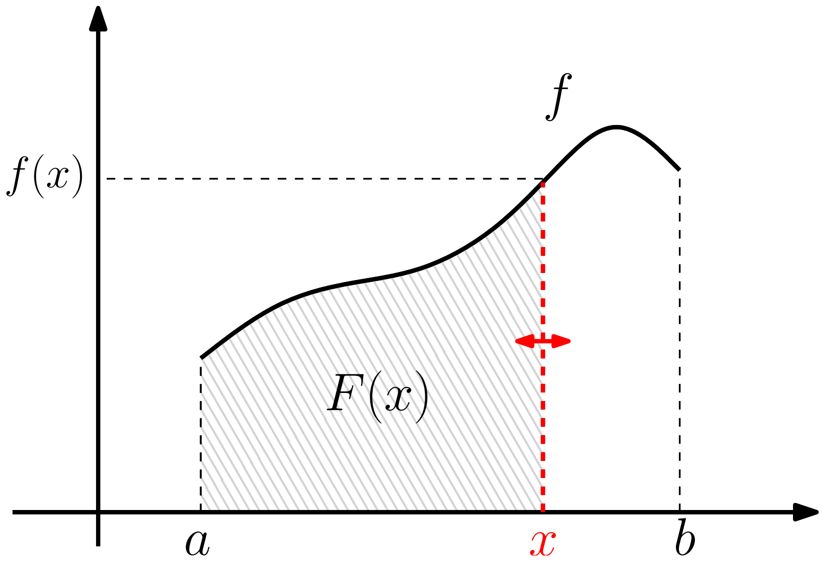


Abbildung 8.2: Dargestellt ist eine stetige Funktion f und ihre Stammfunktion F als Maß der schraffierten Fläche gemäß Satz 8.6. Siehe auch Abbildung 7.6.

Damit ist für stetiges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

eine Stammfunktion von f und das unbestimmte Integral ist dann durch

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left\{ \int_0^x f(y) + C\colon\ C \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

Damit entmystifiziert das Riemann-Integral die letzten beiden Begriffe und erlaubt es uns, jedenfalls im Prinzip, zu jeder stetige Funktion eine Stammfunktion zu berechnen.

Zur konkreten Berechnung der Integrale ergibt sich aus dem Hauptsatz Kommen wir nun zur konkreten Berechnung der Integrale über Stammfunktionen:

Satz 8.7 (HDI, Teil II)**.**
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine (beliebige) Stammfunktion von f. Sann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x = F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a).$$

8.2 Exkurs: Quadraturformeln

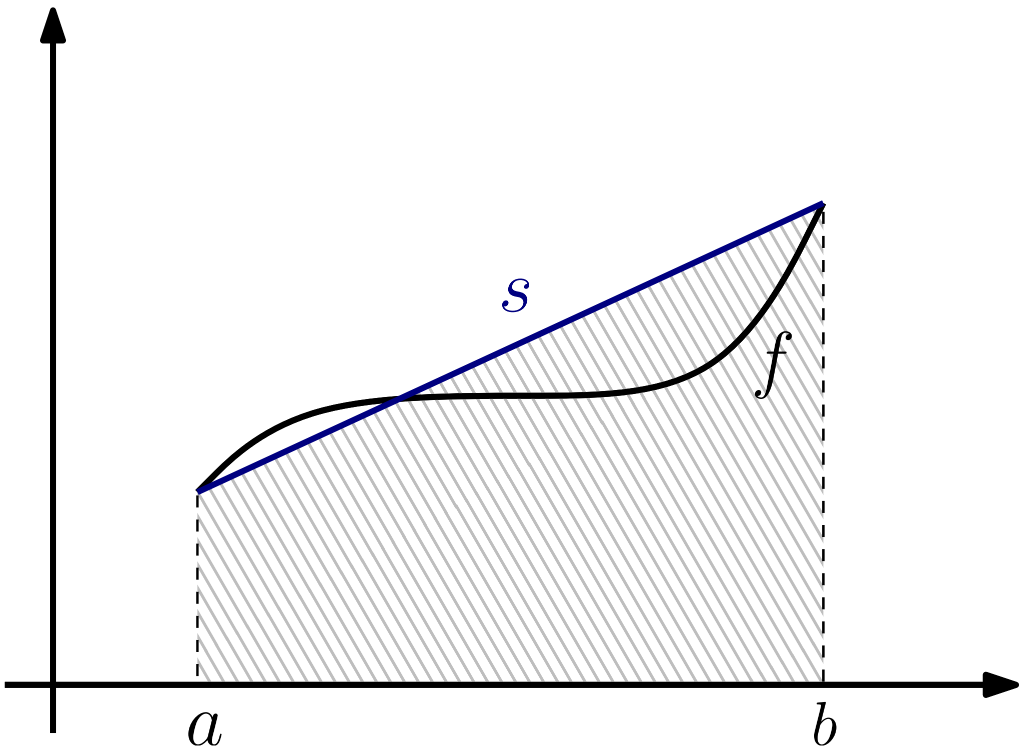
Nur die wenigsten Integrale kann man geschlossen auswerten; in den allermeisten Fällen ist man auf numerische Näherungsverfahren – sogenannte **Quadraturverfahren** – angewiesen.

Prominente Integrale, die sich nachweislich nicht durch elementare Stammfunktionen bestimmen lassen, sind zum Beispiel

$$\Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die entstehende Funktion $x \mapsto \Phi(x)$ heißt **Fehlerfunktion**.

Als Vorbetrachtung ersetzen wir eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ näherungsweise durch ihre Sekante s durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.



Damit erhalten wir die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)). \tag{8.2.1}$$

Schon anschaulich wird klar, daß diese Formel im allgemeinen nur sehr grobe Näherungen liefern kann.

Wesentlich bessere Ergebnisse erhält man aber, wenn man $[a, b]$ in N gleichlange Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ unterteilt mit

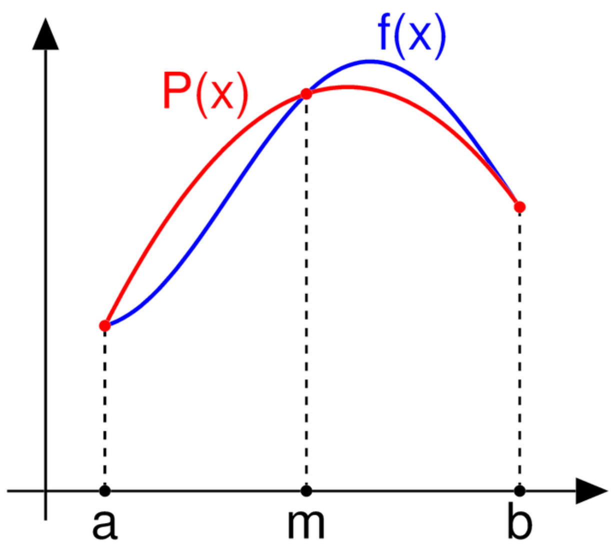
$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \dots, N) \text{ mit } h = (b-a)/N.$$

und die einfache Trapezregel (8.2.1) über jedem Teilintervall anwendet:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}\,h\,(f(x_i)+f(x_{i+1})) \qquad (8.2.2)\\ &= h\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{N-1})+\frac{1}{2}f(x_N)\right].\end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Ausdruck auf der rechten Seite als **Trapezsumme** $T_f(h)$ und die Formel (8.2.2) als **zusammengesetzte Trapezregel**.

Alternativ kann man f lokal auch durch quadratische Polynome ersetzen, und dadurch eine noch bessere Approximation erreichen:



Dieser Ansatz führt letztlich auf die **zusammengesetzte Simpsonregel**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right].$$

Dabei ist N gerade zu wählen. Den Term auf der rechten Seite bezeichnen wir mit $S_f(h)$.

Natürlich will man wissen, wie groß der resultierende Fehler bei Verwendung einer Quadraturformel ist. Dabei hilft uns:

Satz 8.8 (Quadraturfehler Trapez- und Simpsonregel)**.**
Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_f(h) \right| \leq \frac{b-a}{12}\ h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_f(h) \right| \leq \frac{b-a}{180}\ h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Übungsaufgabe 8.4.
Welche der beiden Regeln ist für genügend kleine h genauer?
Approximieren Sie ein bekanntes Integral Ihrer Wahl mit beiden Quadraturformeln für mehrere geeignete Werte von h.

9 Reihen und Taylorreihen

Wir beginnen mit einem Beispiel um uns dem Begriff der (unendlichen) Reihe zu nähern. Wir betrachten die Zahlenfolge $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ und bilden

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Die Identität beweist man leicht mit vollständiger Induktion wozu die Leserin eingeladen ist. Die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine monoton wachsende beschränkte damit konvergente Folge (Satz 3.8). In diesem Fall sehen wir sogar den Grenzwert $s_n \to 1$. Wir sagen in diesem Fall, daßdie Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

konvergiert und die Summe (den Reihenwert) 1 hat. Die Konvergenz eine Reihe ist also über die Konvergenz einer Zahlenfolge definiert. Es mag einem nun so vorkommen, als sei eine Reihe eine unendliche Summe von Gliedern einer Zahlenfolge und diese Vorstellung verband sich mit Reihen durchaus eine ganze Weile. Allerdings ist die Summe von unendlich vielen Zahlen kein sinnvolles mathematisches Objekt und wir warnen die Leserin vor einer solchen falschen Vorstellung. Das man bei der obigen Reihe trotzdem davon spricht, daß $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ den Wert 1 hat , so hat dies historische Gründe; es handelt sich nicht um eine Summe im Sinne des Ergebnisses einer Addition. Summe ist hier nichts anderes als eine Benennung, ein Name, für den Grenzwert der Zahlenfolge $(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k})_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$. Es wird sich herausstellen, daß man mit Reihensummen im allgemeinen auch nicht so rechnen darf wie mit endlichen Summen.

Wenn man eine konvergente Reihe (s.u.) nach endliche vielen Gliedern abbricht, so kann man den Reihenwert beliebig genau annähern. Dies wird in praktischen Anwendungen natürlich ausgenutzt. Die besondere Kraft wird für uns nicht aus Zahlenreihen, also solchen mit konstanten Gliedern wie oben erwachsen, sondern von sogenannten Funktionenreihen. Beispielsweise

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots .$$

Die Summe einer konvergenten Funktionenreihe ist auch wieder eine Funktion. Damit kann man eine Funktionenreihe als eine Darstellung einer Funktion angesehen werden. Es ist ein sehr wichtiges Problem, eine in einer anderen Form gegebene Funktion f in eine Funktionenreihe zu entwickeln, d.h. sie durch eine solche Reihe darzustellen. Wichtig für die Anwendung sind dabei insbesondere Taylor-Reihen und Fourier-Reihen.

9.1 Konvergenzbegriff von Reihen

Nun etwas präziser: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist, dann ist der formale Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

auch bezeichnet durch $\sum a_k$, $\sum\limits_k a_k$ oder $\sum_{k\geq 1} a_k$ heißt eine Reihe und die a_k (Reihen-)Glieder. Wie schon zur Einführung gesagt, ist die Reihe immer als Grenzwert endlicher Summen zu verstehen.

Definition 9.1 ((Konvergente/divergente)Reihe)**.**
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

*heißt die **Folge der Partialsummen**. Ist die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so sagen wir, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und wir setzen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

*Wenn $S_n \to \pm\infty$, dann heißt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent** gegen $\pm\infty$.*

*Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ weder konvergent noch divergent gegen $\pm\infty$, dann sagen wir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **existiert nicht** (bzw. ist **divergent**).*

*Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine gegebene Reihe, dann heißt $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ der n-te **Reihenrest** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Bemerkung 9.1.
Ein paar Bemerkungen zur Definition von Reihen:

(i) Die Definition gilt entsprechend, wenn die Reihe nicht mit dem Glied a_1 beginnt, beispielsweise

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=3}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} a_n.$$

(ii) Der Name des Summationsindexes ist nicht relevant:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum_{l=n_0}^{\infty} a_l = \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i.$$

ganz wie bei Funktionen:

$$\int\limits_0^1 f(t)\,\mathsf{d}t = \int\limits_0^1 f(x)\mathsf{d}x \quad ...$$

(iii) Da die Konvergenz einer Folge nur vom asymptotischen Verhalten der Folge der Partialsummen abhängt[1]*, gilt auch für die Konvergenz von Reihen: Für $m \in \mathbb{N}_0$ konvergiert eine Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ für ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq m$ konvergiert.*

[1] Die Partialsummen müssen dabei nicht beim ersten verfügbaren Glied beginnen. Jedenfalls nicht, wenn es nur um Konvergenz geht. Um den Reihenwert, die Summe, zu definieren, braucht man natürlich alle Reihenglieder.

Bemerkung 9.2.
Die zur Reihe (Grandis Reihe[2])

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{9.1.1}$$

gehörige Partialsummenfolge ist $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ *und die Reihe damit divergent. Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, daß Reihen nicht einfach als 'unendliche Summen' aufgefaßt werden können: paarweises Zusammenfassen benachbarter Glieder* $(1 - 1 = 0)$ *in* (9.1.1) *könnte zum Beispiel zu völlig falschen Schlüssen führen!*

Satz 9.1 (Reihenreste)**.**
Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe ist, dann ist auch jeder Reihenrest konvergent[a] und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

[a]D.h. $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist endlich für alle $n_0 \geq 1$.

Beweis. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Partialsummenfolge von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dann gilt $\lim_{m\to\infty} s_{n+m} = s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da s_n nicht von m abhängt gilt auch

$$\lim_{m\to\infty} (s_{m+n} - s_n) = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k =: r_n.$$

Da $s_n \to s$ für $n \to \infty$, folgt $r_n \to 0$. □

[2]Benannt nach dem italienischen Mathematiker Guido Grandi (1671–1742).

Beispiel 9.1 (Beispiel konvergente Reihe I)**.**
Wir benutzen Satz 3.3 sowie Satz 3.5 um die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^n$$

für $|q| < 1$ *nachzuweisen. Wir wissen bereits, daß*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Da $q^{n+1} = q \cdot q^n \to 0$, *folgt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Beispiel 9.2 (Beispiel konvergente Reihe II)**.**
Wir wollen zeigen, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *konvergiert.*
Dazu betrachten wir zuerst die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. *Für die Partialsumme dieser Reihe gilt*

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \quad \textit{(Teleskopsumme)} \end{aligned}$$

Es gilt also $s_n \to 1$. Da nun $k^2 \geq k(k-1)$ für $k \geq 2$ gilt, haben wir

$$\tilde{s}_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = s_n.$$

Da $(s_n)_n$ konvergent ist, ist $(\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $(\tilde{s}_n)_n$ offensichtlich (streng) monoton wächst, ist $(\tilde{s}_n)_n$ nach Satz 3.8 (monotone Konvergenz) konvergent. (Vergleiche Satz 9.6 und 9.7.)
Mithin ist dann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergent.
Der Reihenwert (die Summe) von $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ ist $\frac{\pi^2}{6}$. Das liegt allerdings außerhalb unserer Reichweite für den Moment; siehe dazu Fourier-Reihen in Mathematik 2. Im allgemeinen werden wir den Wert einer Reihe nicht bestimmen können.
*Das Vorgehen oben nennt man Majorisierung. Man untersucht eine Reihe die einfacher ist und die ursprüngliche majorisiert, d.h. (von oben) kontrolliert. Wenn die **Majorante** konvergiert, dann auch die ursprüngliche Reihe.*

Bemerkung 9.3 (Partialbruchzerlegung)**.**
Um aus $\frac{1}{k(k-1)}$ die Differenz $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ zu erhalten benutzt man eine einfache Variante der sog. Partialbruchzerlegung: Wir setzen

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1},$$

multiplizieren mit $k(k-1)$ und fassen zusammen. Dann haben wir

$$1 = (A+B)k - A. \tag{9.1.2}$$

Wenn wir die Polynome links und rechts vergleichen, erhalten wir die Bedingungen $A + B = 0$ (da links $0 \cdot k$ steht) und $-A = 1$. Damit dann also $A = -1$ und $B = 1$.

Beispiel 9.3 ((Wichtiges!) Beispiel divergente Reihe)**.**
Wir betrachten die Reihe der Reziproken natürlichen Zahlen, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Wir betrachten die Partialsumme s_{2^n}:

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}.$$

*Diese Reihe wird **harmonische Reihe**[a] genannt. Der folgende Beweisansatz findet sich übrigens bereits in mittelalterlicher Literatur (Nicole Oresme, Frankreich, $\approx$ 1350). Es gilt nun*

$$\frac{1}{2^k + 1} + ... + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Jetzt gilt

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + l} \geq \frac{n}{2}.$$

Also gilt $s_{2^n} \to \infty$ und da $(s_n)_n$ streng monoton wachsend ist, gilt $s_n \to \infty$. In diesem Falle sagen wir auch, daß die Reihe bestimmt divergiert und schreiben $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

[a] Harmonisch da die Glieder der Reihe (bis auf das erste) sich als das harmonische Mittel der Nachbarn ergeben.

9.2 Rechenregeln für Reihen

Trivial ist

Satz 9.2.
Wenn man in einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *endlich viele Glieder wegläßt oder hinzufügt oder durch andere ersetzt, so bleibt die Eigenschaft der Konvergenz bzw. Divergenz erhalten.*

Nun zeigen wir, daß wir in konvergenten Reihen Klammern setzen dürfen.

Satz 9.3 (Assoziativgesetz)**.**
Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe mit Summe* $s \in \mathbb{R}$ *und* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine streng monoton wachsende Folge. Mit*

$$b_n := \sum_{l=k_{n-1}+1}^{k_n} a_l, \quad k_0 := 1$$

ist dann $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *ebenfalls eine konvergente Reihe mit Summe* s*.*

Beweis. Da die Partialsummenfolge von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine Teilfolge der Partialsummenfolge von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist, muß sie konvergent sein und denselben Grenzwert haben da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ als konvergent vorausgesetzt ist. $\square$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich direkt

Satz 9.4 (Summen konvergenter Reihen)**.**
Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen mit Summen* s *und* t*.*

Dann gilt: für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergent und die Summe ist $\alpha s + \beta t$.

Übungsaufgabe 9.1.
Beweisen Sie Satz 9.4 im Detail mit Partialsummenfolgen.

9.3 Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern

Ein einfaches notwendiges Kriterium ist

Satz 9.5 (Notw. Konvergenzkrit.)**.**
Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe.*
Dann gilt $a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$*.*

Beweis. Es sei s die Summe von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dann gilt $a_n = s_n - s_{n-1}$ für $n \geq 2$. Da $s_n \to s$ und damit auch $s_{n-1} \to s$ gilt, haben wir □

Aus dem Prinzip der monotonen Konvergenz (Satz 3.8) für Folgen folgt unmittelbar

Satz 9.6 (Monotoniekriterium)**.**
Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Beispiel 9.4.
Ein Beispiel ist unser Beweis der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *sowie von* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *für* $|q| < 1$*. Siehe Beispiele 9.2 und 9.1.*

9.3.1 Vergleichskriterien

Wir haben schon gezeigt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist. Wir wollen nun Kriterien angeben die es uns erlauben, damit die Konvergenz/Divergenz für weitere Reihen zu entscheiden.

Aus dem Prinzip der monotonen Konvergenz (Satz 3.8) für Folgen folgt

Satz 9.7 (Majorantenkriterium)**.**
Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit positiven Gliedern, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiere und es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$.
Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Als erstes verschaffen wir uns eine wichtige Klasse von Vergleichsreihen.

Beispiel 9.5.
Sei $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 3$. Es gilt $k^l \geq k^2$ für alle $k \geq 1$ und damit

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^l}, \quad k \geq 1.$$

Damit ist also die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^l}$ konvergent nach dem Majorantenkriterium.
Man kann zeigen, daß die Reihe sogar für $l > 1$ konvergent ist.

Beispiel 9.6.
Vorgelegt sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3+\cos(k)}{k^3+2k+\sin^2(k)}.$$

Mit etwas Übung sollte man sehen, daß diese Reihe konvergiert, weil der Summand sich wie $\frac{1}{k^2}$ *verhält. Wir wollen das nun etwas präzisieren:*

$$\begin{aligned} \left|\frac{k+3+\cos(k)}{k^3+2k+\sin^2(k)}\right| &\le \frac{k+3+|\cos(k)|}{k^3+2k+\sin^2(k)} \\ &\le \frac{5k}{k^3} = \frac{5}{k^2}. \end{aligned}$$

Wir haben brutal $k+3+|\cos(k)| \le k+3k+k$ *abgeschätzt. Warum nicht? Genauso brutal:* $k^3+2k+\sin^2(k) \ge k^3+2k \ge k^3$*. Da* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *konvergiert, gilt dies auch für die vorgelegte Reihe nach dem Majorantenkriterium. (Und den Rechenregeln für Reihen um genau zu sein.)*

Aus dem Vergleichsprinzip für bestimmt divergente Folgen folgt dann

Satz 9.8 (Minorantenkriterium)**.**
Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Reihen mit positiven Gliedern,* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergiere und es existiere ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \ge b_n$ *für* $n \ge n_0$*.*
Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beispiel 9.7.

Wir untersuchen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$*. Da die Wurzeln monoton ist und* $k \leq k^2$ *gilt, folgt* $\sqrt{k} \leq k$ *und damit* $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{n}$*. Da nun nach Beispiel 9.3 die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergiert, divergiert auch unsere Reihe und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty.$$

9.3.2 Quotienten- und Wurzelkriterium

Satz 9.9 (Quotienten- und Wurzelkriterium)**.**
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit positiven Gliedern und es existiere* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
Dann gilt:

(i) Wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(ii) Wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *dann divergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(iii) Im Fall $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ *gibt es keine Aussage.*

Bemerkung 9.4.
Es reicht sowohl für das Quotienten- als auch für das Wurzelkriterium zu haben, daß ab einem bestimmten Index

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{a_n} \le q \tag{9.3.1}$$

für ein $q \in (0,1)$ *gilt; ähnlich für Divergenz.*
Die Aussage (9.3.1) *folgt natürlich aus der Existenz von* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Allerdings folgt aus* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ *für* $n \ge n_0$ *umgekehrt natürlich nicht, daß* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *existiert.*

Beweis. Wir zeigen das Quotientenktriterium unter den leicht allgemeineren Annahmen der letzten Bemerkung.

Aus $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für $n \geq n_0$ folgt

$$a_{n+1} \leq q a_n, \quad a_{n+2} \leq q a_{n+1} \leq q^2 a_n \quad \text{usw..}$$

Damit erhalten wir

$$a_{n+k} \leq q^k a_n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die konvergente geometrische Reihe $a_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ eine Majorante zu $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Damit konvergiert nach dem Majorantenkriterium (Satz 9.7) die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Wenn ab einem bestimmten Index an $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ gilt, dann gilt $a_{n+1} \geq a_n$, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit positiven Gliedern ist monoton wachsend. Dies widerspricht der notwendigen Konvergenzbedingung $a_n \to 0$ (Satz 9.5). □

Beispiel 9.8.

Beweisen Sie das Wurzelkriterium.

Hinweis: Majorantenkriterium/Geo. Reihe.

Bemerkung 9.5.
Wir haben das Quotienten- und Wurzelkriterium zwar zusammen formuliert, die beiden sind aber nicht gleichwertig.
Wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *existiert, so existiert auch* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *und die Grenzwerte stimmen überein. Die Umkehrung gilt nicht.*
Oft ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *aber wesentlich einfach zu berechnen.*

Beispiel 9.9.
Wir wollen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ *untersuchen (siehe Beispiel 9.1). Wir haben* $a_k = q^k$ *und es gilt*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q.$$

Wenn also $q \in [0, 1)$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ *nach dem Quotientenkriterium (und leicht zu sehen nach dem Wurzelkriterium). Wenn* $q > 1$, *dann divergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

Beispiel 9.10.
Das Quotienten- und Wurzelkriterium ist nicht immer erfolgreich. Wir haben beispielsweise gezeigt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *konvergiert und* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergiert. Das Quotientenkriterium (und leicht zu sehen auch das Wurzelkriterium) liefert aber den 3. Fall.*
Diese Kriterien werden für Summanden die rationale Funktionen sind stets versagen. Wieso?

Beispiel 9.11.
Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k (2k)!}$$

auf Konvergenz untersuchen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)!}{2^{k+1}(2(k+1)!)} \cdot \frac{2^k(2k)!}{k!} \\ &= \frac{k+1}{2(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{4(2k+1)}. \end{aligned}$$

Damit gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{1}{4}$ *bzw.* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$. *Damit ist die betrachtete Reihe also konvergent.*

Beispiel 9.12.
Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k + k}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} + (k+1)} \cdot \frac{3^k + k}{2^k} \\ &= 2\frac{3^k + k}{3^{k+1} + (k+1)} \leq 2 \cdot \frac{(1+\varepsilon)3^k}{3^{k+1} + k + 1} \\ &\leq 2(1+\varepsilon)\frac{3^k}{3^{k+1}} = \frac{2}{3}(1+\varepsilon) < 1. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $k \leq \varepsilon 3^k$ *gilt für* $k \geq 1$ *für* $\varepsilon \in (\frac{1}{3}, 1)$. *Dann konvergiert die Reihe nach Quotientenkriterium bspw. mit* $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Oder:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{3^k + k}{2^k} = \left(\frac{3}{2}\right)^k + \frac{k}{2^k} \to \infty.$$

Damit gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 0$ *und die Reihe konvergiert nach Quotientenkriterium. Man kann aus* $\frac{3^k+k}{3^{k+1}+(k+1)}$ *oben auch* 3^k *ausklammern und damit weiter rechnen. Das sei der Leserin zur Übung überlassen.*

Beispiel 9.13.
Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k + k}.$$

und nutzen diesmal das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{\frac{2^k}{3^k + k}} = \frac{2}{\sqrt[k]{3^k + k}}.$$

Es gilt nun

$$3 = \sqrt[k]{3^k + k} \leq \sqrt[k]{2 \cdot 3^k} = 3 \cdot \sqrt[k]{2}.$$

Da $\sqrt[k]{2} \to 1$ *gilt (Hilfssatz 3.11), folgt nach dem Polizistenprinzip*

$$\sqrt[k]{3^k + k} \to 3.$$

Damit haben wir $\sqrt[k]{\frac{2^k}{3^k+k}} \to \frac{1}{3}$ *nach den Rechenregeln für konvergente Folgen und die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium. Hier war das letztere also einfacher anzuwenden.*

Übungsaufgabe 9.2.
Zeigen Sie nach Beispiel 9.13, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k^2}{4^{k+1} + 2k}$ *konvergiert.*

Beispiel 9.14.
Wir betrachten die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \ldots$$

gegeben durch

$$a_{2k} = \frac{1}{3^{2k}}, \quad a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{3} & : \; k = 2n \\ \frac{1}{2} & : \; k = 2n-1 \end{cases}.$$

Damit können wir schließen, daß die Reihe konvergiert.

Übungsaufgabe 9.3.
Wenden Sie das Quotientenktriterium in Beispiel 9.14 an.

9.3.3 Integralkriterium

Satz 9.10 (Integralkriterium)**.**
Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit positiven Gliedern und die* a_k *seien Funktionswerte, d.h.* $a_k = f(k)$*, einer auf* $[1, \infty)$ *stetigen, monoton fallenden Funktion* f*.*

Dann gilt: die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent ist.*

Beispiel 9.15.
Die Funktionen $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ *ist für jedes* $\alpha > 0$ *stetig und monoton fallend. Wir haben in Abschnitt 7.10 diskutiert, daß das Integral* $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *für* $\alpha > 1$ *konvergiert. Damit folgt nach dem Integralkriterium, daß die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

konvergiert für $\alpha > 1$ *und divergiert für* $\alpha \leq 1$*.*

Wie man in der nachfolgenden Illustration des Kriteriums leicht ablesen kann, ergeben sich die Schranken

$$a_1 + \int\limits_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Diese Schranken sind üblicherweise recht grob und dienen kaum zur Näherung des Reihenwertes.

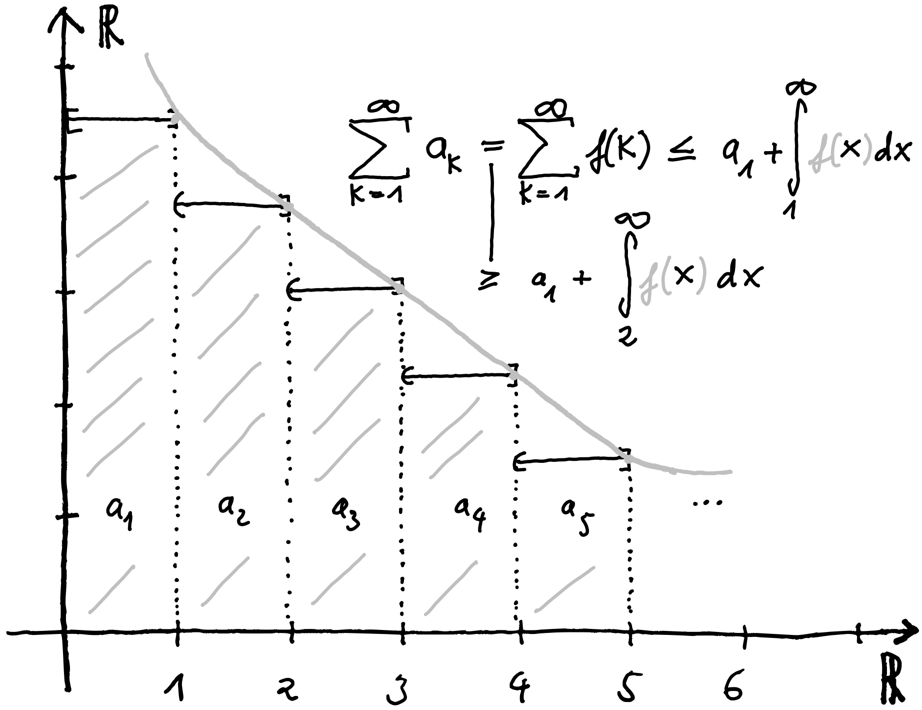


Abbildung 9.1: Das Integralkriterium.

9.3.4 Leibniz-Kriterium

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **alternierend**, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_k a_{k+1} < 0$ gilt, d.h. aufeinanderfolgende Glieder haben verschiedene Vorzeichen.

Satz 9.11 (Leibniz Kriterium)**.**
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine alternierende Reihe.*
Wenn $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge ist, dann ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

Beweis. Durch Multiplikation der Reihe mit -1 wenn nötig, können wir annehmen, daß $a_0 > 0$, d.h. $a_{2k} > 0$ und $a_{2k+1} < 0$. Aus der Monotonie folgt

$$a_{2k} + a_{2k+1} \geq 0 \quad \text{und} \quad a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0.$$

Damit haben wir für die Partialsummen mit ungeradem Index

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + (a_{2k} + a_{2k+1}) \geq s_{2k-1}$$

und geradem Index

$$s_{2k+2} = s_{2k} + (a_{2k+1} + a_{2k+2}) \leq s_{2k}.$$

Damit ist die Folge $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Nun gilt weiter

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} < s_{2k}, \quad k \geq 1.$$

Damit ist s_1 die kleinste und s_0 die größte aller Teilsummen. Damit sind die Folgen $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt und damit, nach monotoner Konvergenz (Satz 3.8). Es gelte

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s' \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} s_{2k} = s''$$

für $s', s'' \in \mathbb{R}$. Da nun $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir benutzen nun

$$a_{2k+1} = s_{2k+1} - s_{2k}$$

und die Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$s' - s'' = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Damit ist also $s' = s''$. Also existiert auch $\lim_{n\to\infty} s_n = s' = s$, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent mit Summe s. □

Beispiel 9.16 (Leibniz-Reihe)**.**
Wir untersuchen die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}.$$

Da $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monotone (Nachweis?) Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Die Summe der Reihe ist* $\log(2)$. *Siehe dazu* *6.18* *und* *9.25*.

Beispiel 9.17.
Wir untersuchen die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

Da $(\frac{1}{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monotone (Nachweis?) Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Der Reihenwert ist* $\frac{\pi}{4}$, *siehe dazu Fourier-Reihen in Mathematik 2.*

Beispiel 9.18.
Wir untersuchen die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}.$$

Da $\left(\frac{1}{(2n-1)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monotone (Nachweis?) Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Der Reihenwert ist* $\frac{\pi^3}{32}$*, siehe dazu Fourier-Reihen in Mathematik 2.*

Hilfssatz 9.1 (Fehlerabschätzung)**.**
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente alternierende Reihe mit Summe* S.[a]
Dann gilt

$$\left|S - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq |a_{n+1}|.$$

[a]Also insbesondere $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit positiven Elementen.

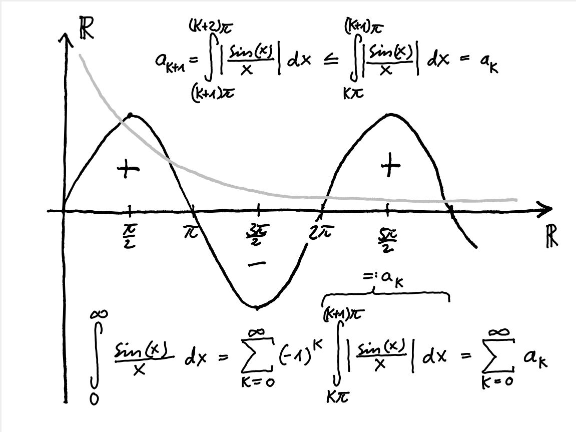
Übungsaufgabe 9.4.
Nehmen Sie ein geeignetes Programm und plotten Sie die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ *um den Hilfssatz 9.1 zu illustrieren.*
Beweisen Sie Hilfssatz 9.1.

Beispiel 9.19.

Wir betrachten noch ein etwas spannenderes Beispiel für das Leibniz Kriterium. Wir wollen zeigen, daß das Uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{9.3.2}$$

konvergiert. Als erstes notieren wir, daß $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ *(hebbare Singularität) also nur wegen des unendlich großen Integrationsbereiches ein uneigentlichen Integral vorliegt; siehe Definition 7.3. Wir gehen das ganz etwas direkter an. Wir benutzen, daß* $\sin(x) = 0$ *genau für* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ *auf* $[0, \infty)$ *gilt und daß die Flächen die der Graph* $y = \sin(x)$ *mit der Ordinatenachse zwischen* $k\pi$ *und* $(k+1)\pi$ *eine alternierende Folge bildet:*



Die Leserin weise noch nach, daß

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \, \mathrm{d}x \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \, \mathrm{d}x = a_{k+1}$$

gilt.

9.3.5 Das Cauchysche Konvergenzkriterium

Aus dem Cauchy-Konvergenzkriterium für Folgen, siehe Satz 3.11, folgt ein entsprechendes Konvergenzkriterium für Reihen

Satz 9.12 (Cauchysches Konvergenzkriterium)**.**
Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $n_0 = n_0(\varepsilon)$*, sodaß*

$$\left| \sum_{k=n+k}^{\infty} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ *und* $k \geq 1$*.*

Das Cauchysche Konvergenzkriterium ist wie bei Folgen eher von theoretischer Bedeutung da es meißt sehr schwerfällig ist die Konvergenz einer Reihe mit diesem Kriterium nachzuweisen. Wir greifen typischerweise auf die hinreichenden Kriterien der vorangehenden Sektionen zurück. Für ein Beispiel siehe Beispiel 3.7.

9.4 Absolute Konvergenz

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, sagen wir gegen s:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots = s.$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Reihen gilt

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}s.$$

Wir addieren nun die beiden Reihen, dürfen wir nach den Rechenregeln für konvergente Reihen, und erhalten

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{3}{2}.$$

Vergleicht man die letzte mit der Ausgangsreihe so stellt man fest, daß die beiden Reihen aus den gleichen Gliedern bestehen, die unterschiedlich angeordnet sind. Die Reihensummen sind mit s und $\frac{3}{2}s$ unterschiedlich. Dies ist einigermaßen schockierend, da wir vom Rechnen mit endlichen Summen gewohnt sind, daß man in SUmmen beliebig umsortieren (Kommutativität) darf. Für Reihen gilt dies im allgemeinen nicht. Schon in der Einleitung hatten wir darauf hingewiesen, daß Reihen Rechnerisch nicht einfach als unendliche Summen aufgefaßt werden können.

Das oben beschriebene Phenomän ist der Grund für die Einführung der folgenden Definition.

Definition 9.2 (Absolute Konvergenz)**.**

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe.*

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert, dann heißt die Reihe* ***absolut konvergent****.*

Beispiel 9.20.
Wir haben in Beispiel 9.16 gezeigt, daß $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ *konvergiert und ist Beispiel 7.2, daß* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *divergiert. Also ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ *nicht absolut konvergent.*
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$ *ist hingegen absolut konvergent nach Beispiel 9.2.*

Satz 9.13.
Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.*

Bemerkung 9.6.
Der Satz 9.13 impliziert insbesondere, daß konvergente Reihen mit positiven Gliedern absolut konvergieren.

Beweis. Wir müssen das Cauchysche Konvergenzkriterium zur Anwendung bringen.
Wir wollen zeigen, daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und wissen, daß $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Wir wollen

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}|$$

kontrollieren. Als erstes benutzen wir die Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|$$

und stellen fest, daß

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| = \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|\big|$$

gilt. Da nun $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+k}| \big| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und $k \geq 1$. Also gilt auch

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und $k \geq 1$ und wir haben die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gezeigt.

$\square$

9.4.1 Umordnung von Reihen

Wir kommen nun zum Beispiel der Umordnung einer Reihe vom Anfang dieser Sektion zurück. Als ersten klären wir Begriffe.

Unter der Umordnung einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ versteht man die Herstellung einer weiteren Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, die alle Glieder a_k der Ausgangsreihe genau einmal enthält: damit ist

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

eine Umordnung der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots .$$

Absolut konvergente Reihen und konvergente Reihen unterscheiden sich fundamental in Ihrem Verhalten bzg. Umordnung. Zu Klassifikation die nachfolgende Definition.

Definition 9.3 ((Un)bedingte Konvergenz)**.**
Wir führen die folgende Unterteilung von konvergenten Reihen ein:

*(i) Wenn jede aus der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch Umordnung der Glieder entstehende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent ist und den gleichen Grenzwert wie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat, dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **unbedingt konvergent**.*

*(ii) Wenn eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diese Eigenschaft nicht hat, dann heißt sie **bedingt konvergent**.*

Satz 9.14.
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *unbedingt konvergent, kann also beliebig umgeordnet werden ohne das sich die Summe ändert.*

Bemerkung 9.7.
Nach Satz 9.14 kann man also die Reihenglieder in absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *beliebig umsortieren, d.h. für jede bijektive Funktion* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Insbesondere (Bemerkung 9.6) gilt dies für konvergente Folgen mit positiven Gliedern.

Wir haben weiter (ohne Beweise)

Satz 9.15.
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe.*

(i) Wenn die Reihe bedingt konvergiert, dann divergiert sowohl die Reihe die aus den positiven Gliedern gebildet wird als auch die Reihe die aus den negativen Gliedern gebildet wird.

(ii) Wenn die Reihe nicht absolut konvergiert, so konvergiert sie bedingt.

Wir schließen das Kapitel mit dem riemannschen Umordnungssatz. Er verdeutlicht noch einmal in eindrucksvoller Weise das unterschiedliche verhalten von nur konvergenten Reihen und absolut konvergenten Reihen.

Satz 9.16 (Riemannscher Umordnungssatz)**.**
Sei die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *bedingt konvergent.*
Dann existiert für jedes $s \in \mathbb{R}$ *eine Umordnung* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *der Glieder der Reihe mit* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = s$.
Weiterhin existieren auch Umordnungen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ *die gegen* ∞ *bzw.* $-\infty$ *divergieren.*

9.5 Multiplikation von Reihen

Wir wissen schon, daß man Reihen addieren kann. Wir wollen nun sehen, wie man konvergenten Reihen vernünftig ein Produkt zuordnen kann. Seien also die absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$ gegeben.[3] Wir schreiben

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l\right) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l. \tag{9.5.1}$$

Natürlich hätte man auch mit $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)$ beginnen können. Das Resultat ist dann eine Umordnung der obigen Produktreihe. Wir untersuchen nun die Konvergenz. Dazu betrachten wir eine beliebige Produktreihe und wir zeigen gleich absolute Konvergenz. Das Produkt $\sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l$ enthält jeden Term des folgenden Schemas genau einmal:

$$\begin{matrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \dots \\ a_1b_1 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} .$$

Wir bauen also eine beliebige Umordnung des Produktes durch die Wahl von zweier bijektiver Funktionen $\sigma, \tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann gilt mit

$$N := \max\left\{\max_{0\le k\le n} \sigma(k)\,,\ \max_{0\le k\le n} \tau(k)\right\}$$

[3]Der einfache Formulierung halber und gemäß der Anwendung die wir im Auge haben, formulieren wir die Aussagen hier für Reihen mit Summationsindex beginnend bei 0. Wenn eine Reihe bei 1 beginnt, kann man einfach Glieder mit Wert 0 anfügen.

die Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma(k)} b_{\tau(k)}| &\leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} |a_k||b_l| \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|\right) \left(\sum_{l=1}^{N} |b_l|\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right) = AB\end{aligned}$$

mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = B$$

Damit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} b_{\tau(k)}$ absolut konvergent und nach Satz 9.13 konvergent. Nach der Diskussion im letzten Abschnitt ist die Reihensumme unabhängig von der Reihenfolge der Summation und mit unserer Konvergenzaussage ist die Rechnung (9.5.1) korrekt.

Wir schreiben das Produkt nun noch in einer besonders nützlichen Form, dem sogenannten **Cauchy-Produkt**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

wir summieren also die Diagonalen (rot) auf:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\ a_1 b_1 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ a_3 b_1 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} .$$

Intuition: Da die ersten Summanden einer Reihe üblicherweise größer sind als die mit größerem Index, empfiehlt sich eine solche Reihenfolge also auch für die Darstellung der Produktreihe. Man ordnet deshalb die Produktglieder so an, daß man die Summe der Indizes ansteigen läßt. Dann sind auch in der Produktdarstellung die früheren Summanden im allgemeinen größer als die späteren, was für eine approximative Darstellung der Produktreihe durch eine endliche Summe wichtig ist.

Wir fassen unsere Diskussion im folgenden Satz zusammen.

Satz 9.17 (Cauchy-Produkt/Faltungsprodukt)**.**
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen mit Summen* s *und* t*.*
Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

das sogenannte ***Cauchy-Produkt****/Faltungsprodukt absolut mit Summe* st*.*

Es gibt auch Produkte, wenn nicht beide Reihen absolut konvergieren aber wir werden nur das Cauchy-Produkt brauchen.

9.6 Konvergenz von Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Folgen und Reihen (reeller) **Funktionen** auseinandersetzen.

Definition 9.4.
Eine Folge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

von Funktionen

$$f_n\colon I \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir ***Funktionenfolge*** *auf I. Wir schreiben, wie bei Zahlenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kürzer $(f_n)_n$.*

Wir suchen nach geeigneten Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen.
Der Naheliegendste ist:

Definition 9.5 (Punktweise Konvergenz)**.**
Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt ***punktweise konvergent*** *gegen die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ wenn*

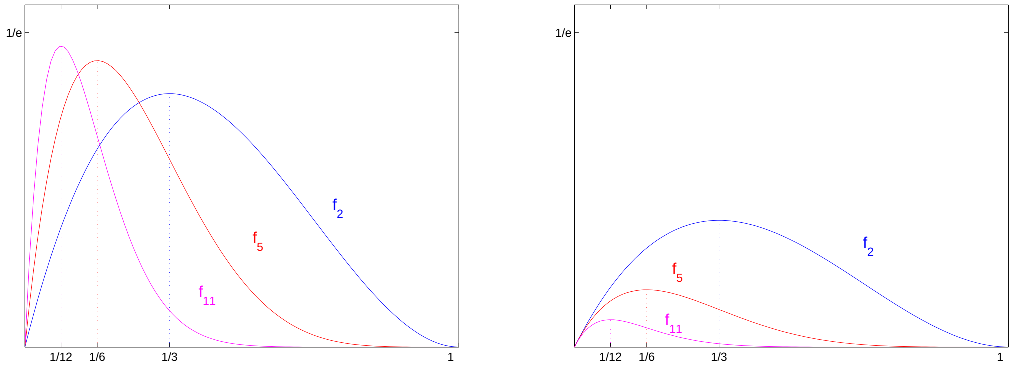
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in I, \tag{9.6.1}$$

d.h. wenn für jedes $x \in I$ die ***Zahlenfolge*** *$(f_n(x))_n$ gegen $f(x)$ konvergiert. Die Funktion f heißt* ***Grenzfunktion*** *von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben $f_n \to f$.*

Bemerkung 9.8.
Äquivalent zu (9.6.1) ist die Aussage

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Die Funktionenfolgen $f_n(x) = nx(1-x)^n$ (links) und $f_n(x) = x(1-x)^n$ (rechts) konvergieren auf $[0,1]$ beide punktweise gegen $f(x) = 0$.



Am Beispiel der Funktionenfolge links erkennen wir bereits, daß trotz punktweiser Konvergenz auch für große n nicht *alle* Funktionswerte von f_n beliebig nahe bei Null liegen müssen.

Punktweise Konvergenz ist generell eine recht schwache Eigenschaft. Beispielsweise kann folgendes passieren:

- Die Grenzfunktion f ist nicht stetig, obwohl alle Folgenglieder f_n stetig sind.
- Die Folge der Integrale $\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, aber nicht gegen das Integral $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ über die Grenzfunktion.

Übungsaufgabe 9.5.
Illustrieren Sie die obigen Aussagen an folgenden Beispielen:

- $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n,$
- $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$.

Die Problemfälle die wir oben diskutiert haben, haben gemeinsam, daß die Funktionswerte $f_n(x)$ auch für große n nicht *gleichmäßig* nahe bei $f(x)$ liegen.

Wir formulieren daher einen strengeren Konvergenzbegriff:

Definition 9.6 (Glm. Konvergenz)**.**
Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf einem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *heißt* ***gleichmäßig konvergent*** *gegen* $f\colon I \to \mathbb{R}$, *wenn*

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{9.6.2}$$

Wir schreiben auch $f_n \rightrightarrows f$.

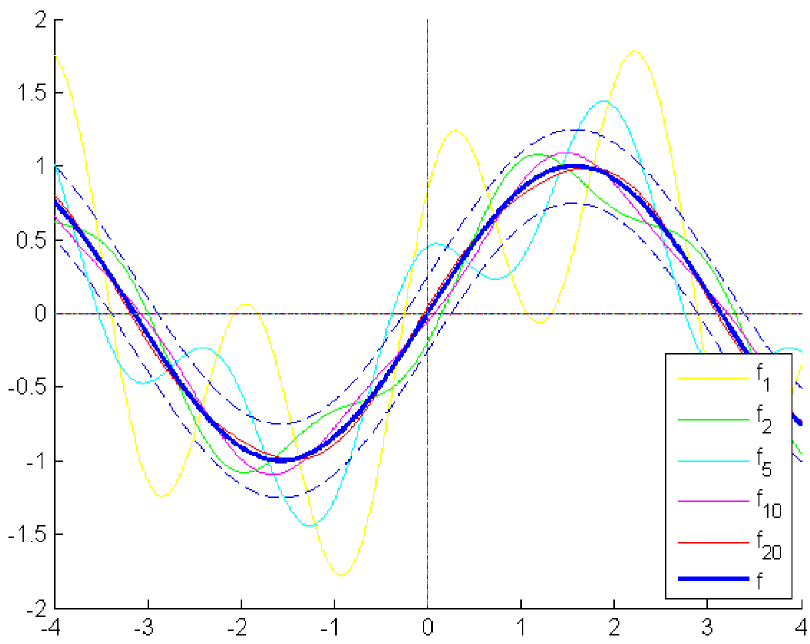
Erinnerung: Das Supremum $\sup(M)$ einer beschränkten Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist deren kleinste obere Schranke. Falls das Maximum existiert, gilt $\sup(M) = \max(M)$. Siehe Definition 2.2 und nachfolgende Erklärungen.

Beispiel 9.21.
Die Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n}\sin(3x+n)$ *konvergiert auf* $\mathbb{R}$ *gleichmäßig gegen* $f(x) = \sin(x)$, *denn*

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}|\sin(3x+n)| \\ &= \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Im nachstehenden Bild sind Glieder der Funktionenfolge gezeichnet sowie deren Grenzfunktion (blau).

Man beachte, daß ab einem bestimmten n (hier z.B. $n \geq 5$) alle Funktionsgraphen komplett innerhalb eines beliebig dünnen 'ϵ-Schlauchs' um die Grenzfunktion f verlaufen (blau gestrichelt)



Satz 9.18 (Glm. Konv. $\Rightarrow$ Punktw. Konv.)**.**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge die gleichmäßig gegen $f \colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert.
Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen f.

Gleichmäßige Konvergenz ist also 'stärker' als punktweise Konvergenz. Der nächste Satz gibt uns Rechenregeln für gleichmässig-konvergente Folgen.

Der Beweis von Satz 9.18 ist denkbar einfach und wir wollen ihn hier durchgehen um ein bißchen mit den technischen Seiten der eingeführten Begriffe vertraut zu werden. Der Verständlichkeit wegen habe ich den Beweis hier und da aufgeblasen.

Beweis. Wir wollen Zeigen, daß für alle $x \in I$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Wegen Definition 3.6 müssen wir also zeigen: Für alle $x \in I$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wir wissen, daß nach Voraussetzung für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert mit

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

für $n \geq n_0$. Da nun $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ gilt haben wir zusammen: Sei $x \in I$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq n_0: \qquad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Damit gilt

$$n \geq n_0: \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$. □

Für punktweise konvergente Folgen ergeben sich natürlich aus den Rechenregeln in Satz 3.5 unmittelbar Rechenregeln durch Anwendung auf die Folgen $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für fixiertes $x \in I$. Wir überlassen es der Leserin sich das nochmal klarzumachen und gegebenenfalls die Regeln auszuschreiben.

Auch für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen haben wir natürlich Rechenregeln. Der Beweis des folgenden Satze ist hinreichen einfach, daß wir diesen der Leserin überlassen wobei wir davon ausgehen, daß sie den letzten durchgearbeitet hat. Der Beweis des Satzes 3.5 gibt auch Inspiration.

Satz 9.19 (Rechenregeln für glm. konvergente Funktionenfolgen).
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ sowie $g_n\colon I \to \mathbb{R}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolgen die gleichäßig gegen $f\colon I \to \mathbb{R}$ bzw. $g\colon I \to \mathbb{R}$ konvergieren.
Dann gilt:

(i) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergiert $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\alpha f + \beta g$.

(ii) Die Funktionenfolge $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen fg.

Der $=$Begriff der gleichmäßigen Konvergenz 'behebt' die Probleme, die punktweise Konvergenz hatte. Zur Erinnerung: eine punktweise konvergente Folge stetiger Folgen muß keine stetige Grenzfolge haben. Der Grenzwert $n \to \infty$ ist bei punktweiser Konvergenz im allgemeinen nicht mit dem Grenzprozeß $\int$ vertauschbar.

Satz 9.20.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert.
Dann ist f stetig.

Satz 9.21.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge integrierbarer Funktionen die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert.
Dann ist f auch integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schließlich formulieren wir noch ein Ergebnis für die Ableitung bei gleichmäßiger Konvergenz:

Satz 9.22.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge differenzierbarer Funktionen die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiterhin sei die Funktionenfolge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $g\colon I \to \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls differenzierbar und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Bemerkung 9.9.
Es ist wichtig den Satz richtig zu lesen! Die zweite Voraussetzung, daß auch die Funktionenfolge der Ableitungen gleichmäßig konvergieren muß kann nicht fallengelassen werden. Beispiel: Die Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ und natürlich sind alle f_n differenzierbar. Die Folge der Ableitungen $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergiert jedeoch gar nicht. Nicht mal punktweise.

9.6.1 Funktionenreihen

Wie bei Zahlenfolgen kann man zu einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Partialsummenfolge definieren:

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1, \\ s_2 &= f_1 + f_2, \\ s_3 &= f_1 + f_2 + f_3, \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} f_k, \ \dots \end{aligned}$$

Diese Partialsummenfolge nennen wir auch **Reihe der Funktionen** f_k. Die Funktionen f_k heißen **Glieder** der **Funktionenreihe**.

Schreibweise: Wir schreiben für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, sowohl für die Reihe selbst als auch für deren Grenzwert, genau wie bei reellen Reihen.

Definition 9.7 (Punktw./Glm. konv. Funktionenreihen)**.**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ heißt genau dann ***punktweise/gleichmäßig konvergent*** *gegen $f : I \to \mathbb{R}$, wenn die Funktionenfolge ihrer Partialsummen punktweise/gleichmäßig konvergent gegen f ist.*

Wir können die Sätze 9.18 - 9.22 direkt auf Funktionenreihen übertragen. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k : I \to \mathbb{R}$ eine Funktionenreihe gleichmäßig konvergent gegen $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

(i) Sind alle Reihenglieder f_k stetig, so ist auch die Summenfunktion f stetig, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir nennen dies **gliedweise Integration** (integration term by term).

(ii) Sind alle f_k differenzierbar, und konvergiert die abgeleitete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig gegen ein g, dann ist auch die Summe f differenzierbar und es gilt $f' = g$, d.h.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Wir nennen dies **gliedweise Differentiation** (differentiation term by term).

9.7 Potenzreihen – Definition

Bei Potenzreihen handelt es sich um Funktionenreihen mit Gliedern vom Typ

$$f_k(x) = a_k(x - x_0)^k.$$

Als Teilsummen entstehen Polynome n-ten Grades:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k.$$

Definition 9.8 (Potenzreihen)**.**
Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \qquad (x, x_0, a_k \in \mathbb{R}) \tag{9.7.1}$$

*heißt **Potenzreihe** mit **Zentrum**[a] x_0 und **Koeffizienten** a_k.*

[a] In bestimmten Kontexten wird das Zentrum auch Entwicklungspunkt genannt. Wir werden noch sehen wieso.

Beispiel 9.22.
Eine der berühmtesten Potenzreihen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

Sie besitzt den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, die Koeffizienten $a_k = \frac{1}{k!}$ und konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
Das diese Reihe die Funktion $x \mapsto e^x$ tatsächlich darstellt, wissen wir noch nicht, haben aber dafür in Beispiel 6.19 schon alles erforderliche gesammelt.

Wir untersuchen nun das Konvergenzverhalten von (9.7.1) in Abhängigkeit von x, während a_k und x_0 fest gehalten werden.

Satz 9.23 (Cauchy-Hadamard[a]).
Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

gibt es einen ***Konvergenzradius*** $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Potenzreihe konvergiert (absolut) für $x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$.

(i) Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq (x_0 - R,\, x_0 + R)$.

(i) Die Potenzreihe divergiert außerhalb $[x_0 - R,\, x_0 + R]$ *(nur sinnvoll für* $R \neq \infty$*).*

[a] Jacques Hadamard, 1865-1963, französischer Mathematiker

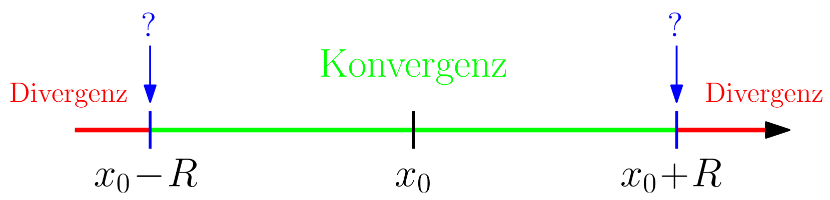


Abbildung 9.2: Darstellung des in Satz 9.23 diskutierten Verhaltens.

Bemerkung 9.10.
Das Intervall $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ *wird auch* ***Konvergenzintervall*** *der Potenzreihe genannt.*
Das Konvergenzverhalten an den kritischen Punkten $x_0 - R$ *und* $x_0 + R$ *muß immer gesondert untersucht werden!*

Wie berechnen wir den Konvergenzradius? Wir wenden das Quotienten/Wurzelkriterium an:

Satz 9.24.
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann gilt:*

(i) $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, *falls fast alle* a_k *von Null verschieden sind, und dieser Grenzwert existiert,*

(ii) $R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, *falls der Grenzwert im Nenner existiert. Dabei sind die Konventionen '*$\frac{1}{\infty} = 0$*' und '*$\frac{1}{0} = \infty$*' zu treffen.*

Beispiel 9.23.
Der Konvergenzradius von $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *ist* ∞. *Tatsächlich ergibt sich mit dem erstgenannten Kriterium*

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} \\ &= \lim_{k\to\infty} (k+1) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übungsaufgabe 9.6.

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}.$$

Vergessen Sie nicht, die Randpunkte des jeweiligen Konvergenzintervalls zu untersuchen.

Die Ergebnisse zu gliedweise Integration und Differentiation lassen sich natürlich übertragen. Es gilt sogar

Satz 9.25.
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *besitze den Konvergenzradius* $R > 0$. *Die Funktion*

$$\begin{cases} f\colon (x_0 - R,\, x_0 + R) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \end{cases}$$

hat dann folgende Eigenschaften:

(i) f *ist stetig.*

(ii) f *ist auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von* $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ *(Riemann) integrierbar, wobei dort dann*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + C$$

gilt.

(iii) f *ist beliebig oft differenzierbar mit*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1},$$
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}, \qquad \textit{usw.}$$

Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

9.8 Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

Es stellt sich die Frage, wann z.B. eine unendlich oft differenzierbare Funktion als Potenzreihe geschrieben (‘in eine Potenzreihe entwickelt‘) werden kann.

Aus der Formel in der letzten Zeile von Satz 9.25 ergibt sich, daß für die Koeffizienten *immer*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

gelten muß. Die sogenannte **Taylor-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ist also der einzige Kandidat für eine mögliche Potenzreihendarstellung von f. Wir hatten die Partialsummenfolge der Taylorreihen als Taylorpolynome im Abschnitt 6.17 kennengelernt. Es reicht allerdings weder, daß die Funktion f unendlich oft (d.h. beliebig oft) differenzierbar ist, noch das die Taylorreihe konvergiert. Um sicherzustellen, daß f durch seine Potenzreihe dargestellt wird, muß das Restglied für alle x aus dem Konvergenzintervall (ohne Rand) verschwinden. Wir werden das im folgenden diskutieren, ich empfehle aber, daß Sie sich die Beispiele 6.16, 6.17, 6.18, 6.19 und 9.1 nochmal ansehen.

Als erstes geben wir die formale Definition von Taylor-Reihen.

Definition 9.9 (Taylor-Reihe)**.**
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *eine unendlich oft differenzierbare*[a] *Funktion und* $x_0 \in (a,b)$.
Dann heißt

$$Tf(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylor-Reihe von f *mit Zentrum/Entwicklungspunkt* x_0.
Wenn $x_0 = 0$ *ist, dann wird die Reihe auch oft McLaurin-Reihe genannt.*

[a] man sagt auch glatte

Folgende Phänomene können auftreten:

(i) Die Taylor-Reihe divergiert für $x \neq x_0$.
Beispiel: Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\infty e^{-y}\cos(y^2 x)\,\mathrm{d}x.$$

Es gilt

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \pm(2n)! & : \; n = 2k \\ 0 & : \; n = 2k+1 \end{cases}$$

womit der allgemeine Term der Taylor-Reihe die Form

$$\pm\frac{(2n)!}{n!}x^n, \quad n = 2k$$

annimmt. Dieser verletzt aber das notwendige Konvergenzkriterium nach Satz 9.5.

(ii) Die Taylor-Reihe konvergiert, stellt aber die Funktion nicht dar für $x \neq x_0$. Als Beispiel betrachten wir

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & : \; x > 0 \\ 0 & : \; x \leq 0 \end{cases}$$

betrachten, dann können wir in $x_0 = 0$ die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)(0)}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} 0$$

aufstellen.[4] Diese konvergiert natürlich aber es gilt wohl kaum

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

(iii) Die Taylor-Reihe konvergiert und stellt die Funktion in einer Umgebung des Punktes x_0 dar. Es kann aber sein, daß die Reihe nicht auf dem gesamten Definitionsgebiet konvergiert.
Ein Beispiel ist gegeben durch

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Für $|x| < 1$ erhält man aus der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Die Funktion ist aber auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar.

[4] Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$.

Für den dritten Fall führen wir einen weiteren Namen ein.

Definition 9.10 (Analytische Funktion)**.**
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, beliebig oft differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$. Dann heißt f genau dann ***analytisch in*** *x_0, wenn f auf einer Umgebung $U_\delta(x_0)$*[a] *des Punktes x_0 in eine konvergente Taylor-Reihe entwickelt werden kann und auf dieser Umgebung $f = Tf$ gilt.*
Eine Funktion heißt ***analytisch****, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereiches analytisch ist.*

[a]Wir setzen: $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x - x_0| < \delta\}$.

Wir wollen nun sehen, wann eine Funktion reell analytisch ist. Nach dem Satz von Taylor (Satz 6.16) gilt unter den Voraussetzungen von Definition 9.9 für $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x) + R_n f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x. Wie schon erwähnt brauchen wir für $T_n f \to f$ auch $R_n f \to 0$.

Wir formulieren

Satz 9.26 (Charakterisierung Analytizität)**.**
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, unendlich oft differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$.
Dann ist f genau dann ***analytisch*** *in x_0, wenn eine Umgebung $U_\delta(x_0) \subseteq (a,b)$ ($\delta > 0$) existiert auf der die Taylor-Reihe Tf konvergiert und für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt $R_n(x) \to 0$.*

Abschließend wollen wir fragen was die Taylor-Reihe einer Potenz-reihe ist und ob die Taylor-Reihe einer analytischen Funktion eindeutig bestimmt ist.

Was ist die Taylor-Reihe einer Potenzreihe? Wir setzten

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Nach den obigen Ausführungen zur Differenzierbarkeit von Potenzreihen gilt

$$f^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_n$$

also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Da auch $a_0 = f(x_0)$ gilt haben wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

und damit

Satz 9.27.
Jede Potenzreihe ist die Taylor-Reihe ihrer Summenfunktion.

Wir halten noch den folgenden Satz zur Eindeutigkeit von Potenzreihen fest:

Satz 9.28 (Identitätssatz)**.**
Es seien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \textit{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

und beide Reihen haben das gleiche Konvergenzintervall $|x - x_0| < \varepsilon$*,* $\varepsilon > 0$*. Es sei* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ *mit* $x_n \neq x_0$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x_n \to x_0$*. Weiter gelte* $f(x_n) = g(x_n)$ *für* $n \in \mathbb{N}$*.*
Dann sind f *und* g *identisch, d.h. es gilt* $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in I$ *und* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Zusammen mit dem vorletzten Satz folgt dann alsogleich, daß die Taylor-Reihe einer analytischen Funktion eindeutig bestimmt ist.

9.9 Erste wichtige Beispiele von Taylor-Reihen

Im Abschnitt zum Satz von Taylor (Sektion 6.17) (bzw. den Hausaufgaben) haben wir die folgenden Reihen schon diskutiert. Die Leserin ist aufgefordert die notwendigen Informationen im Lichte des Satze 9.26 nochmals zusammenzutragen bzw. fehlendes zu ergänzen.

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$; gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$; gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$; gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$,
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$; gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ (geometrische Reihe, siehe Beispiel 9.1).

Diese Reihen sollten Sie im wesentlich im Kopf parat haben damit Sie weitere Reihen einfach berechnen können. Ein paar Methoden bestimmte Reihen zu berechnen für die man nicht erst weitere Ableitungen ausrechnen muß, werden im Abschnitt 9.11 präsentiert.

9.10 Die Binomialreihe

Wir wollen eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes (Satz 2.18) für reelle Exponenten herleiten.
Wir haben für $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Wenn $n = -1$, dann haben wir $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$ und erkennen dies als die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1.$$

Um $(1+x)^{-2}$ zu berechnen benutzen wir das Cauchy-Produkt von Reihen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} ((-1)^{n-k} x^{n-k})((-1)^k x^k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad |x| < 1. \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1\right) \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ könnte man natürlich weiterhin so Verfahren. Wir geben eine weitere mögliche Ableitung der binomischen Reihe in diesem Fall in Beispiel **??** im nächsten Abschnitt.

Wir berechnen die allgemeine Ableitung von $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ und erhalten

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} (\alpha - k)(1+x)^{-(n+1)}$$

und damit (siehe Def. 2.6)

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Die Taylor-Reihe Tf von f ist also

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^k.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist 1 (Übung!); hier ist die Voraussetzung $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ wichtig. Wir haben noch das Restglied zu untersuchen:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}.$$

Wir sehen leicht, daß $R_n(x) \to 0$ für alle $|x| < 1$. Damit haben wir Newtons Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

Beispiel 9.24.
Wir benutzen diese Formel, um eine Reihendarstellung für π abzuleiten. Wir erinnern uns, daß man ein Viertel-Einheitskreis durch die Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ parametrisieren kann. Die Fläche die zwischen dem Graphen und der Ordinatenachse eingeschlossen wird hat den Inhalt $\frac{\pi}{2}$. Es gilt

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Nach unserer obigen Herleitung haben wir

$$\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^{2k}, \quad |x| < 1$$

Hier sollten wir noch nun die Konvergenz der Reihe und das Verschwinden des Restgliedes in $x = 0$ sicherstellen. (Übungsuafgabe!)

Nach unseren Rechenregeln für Potenzreihen (Satz 9.21) gilt

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{1/2}{k} = \frac{\pi}{4}$$

und damit haben wir die Newtonsche Reihendarstellung für π gewonnen:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{1/2}{k}.$$

Vor kurzem hat Veritasium ein Video (Link) zu diesem Thema veröffentlicht. Da wird auch erklärt, daß es besser ist $\int_0^{\frac{1}{2}}$ zu berechnen. Können Sie erklären wieso? Ein weiteres nettes Video zum Thema von Matt Parker finden Sie hier.
Ein interessantes Buch zum Thema π und seine Berechnung ist [3].

Wir notieren noch die Spezialfälle

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \dots, \quad |x| \le 1$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \dots, \quad |x| < 1. \tag{9.10.1}$$

Dabei bleibt die Untersuchung der Randpunkte $x = \pm 1$ im ersten Fall der Leserin überlassen.

9.11 Praktische Berechnung von Potenzreihen

Wir beginnen mit einer anderen (als in Beispiel 6.18) Ableitung der Reihendarstellung des Logarithmus.

Beispiel 9.25.
Die Reihen Darstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

bekommt man leicht aus der Darstellung der geometrischen Reihe. Wir verwenden dafür die Tatsache, daß es uns erlaubt ist, konvergente Potenzreihen gliedweise zu differenzieren und zu integrieren. Da gilt

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

brauchen wir rechts nur die Geometrische Reihe zu erkennen wobei wir x durch $-x$ zu ersetzen haben:

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1.$$

Durch gliedweise Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1},, \quad |x| < 1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + c, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Die Konstante ergibt sich zu $c = 0$ da $\log(1+0) = \log(1) = 0$ gilt.
Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium auch im Punkt $x = 1$ und da das Restglied $R_n(1)$ für $n \to \infty$ auch verschwindet gilt

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

Bemerkung 9.11.
In Beispiel 9.25 bekommen wir den Konvergenzradius und die Tatsache, daß die Reihe gegen die Funktion konvergiert geschenkt, da sich dies von der einfacher zu untersuchenden geometrischen Reihe ergibt. Wir erinnern uns, das die Untersuchung des Restgliedes in Beispiel 6.18 alles andere als einfach war.

Wir wollen uns im kommenden Beispiel eine Reihendarstellung der arctan-Funktion verschaffen. Wir werden uns wieder der unendlich wichtigen geometrischen Reihe bedienen.

Beispiel 9.26.
Wir untersuchen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctan}(x)$ *und erinnern uns an*

$$(\operatorname{arctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad |x| < 1.$$

Die rechte Seite erkennen wir (sofort) als geometrische Reihe

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Wieder integrieren wir gliedweise und erhalten

$$\operatorname{arctan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + c, \quad |x| < 1$$

und wieder ist $c = 0$ *da* $\operatorname{arctan}(0) = 0$ *gilt.*
Wieder haben wir die Konvergenzuntersuchung einfach von der geometrischen Reihe stibitzt und uns damit doch einige Arbeit erspart. (Obgleich die Untersuchung des Restgliedes hier nicht so schwer ist, wie für den Logarithmus oben. Versuchen Sie es!)

Soweit so gut. Wie sieht es mit einem anderen Entwicklungspunkt aus? Bis jetzt haben wir alle Funktionen in $x_0 = 0$ entwickelt und wir sollten versuchen zu verstehen, wie man diesen verschieben kann. Vielleicht beginnen wir mit etwas einfachem.

Beispiel 9.27.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ *und fragen, ob wir diese in einem Entwicklungspunkt* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *in eine Reihe entwickeln können. Auch* $\frac{1}{x}$ *sieht irgendwie nach geometrischer Reihe aus, aber nicht ganz. Wir sollten uns an dieser Stelle erinnern, daß*

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0+(x-x_0)}$$

gilt und schon haben wir gewonnen. Setzen wir der Illustration halber erstmal $x_0=1$. *Dann gilt nämlich*

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-(-(x-1))}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k,\quad |x-1|<1.$$

Die rechte Seite ist eine Potenzreihe mit Zentrum $x_0=1$ *und wir haben* $f^{(n)}(0)=(-1)^n$.
Natürlich können wir das ganze jetzt einfach mit $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *beliebig wiederholen:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=\frac{1}{x_0-(x_0-x)}\\&=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{x_0-x}{x_0}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x_0^{k+1}}(x-x_0)^k,\quad |x-x_0|<|x_0|.\end{aligned}$$

Frage: Wie ergibt sich der Konvergenzradius $R=|x_0|$*?*
Wieder wurde alle Schwerarbeit von der geometrischen Reihe (bzw. von uns als wir Sie erstmals behandelten) erledigt. Sie sehen mal wieder: wir können einfach nicht auf sie verzichten.
Natürlich wäre es hier kein unüberwindlichen Hindernis gewesen die Ableitungen zu berechnen aber wir hätten die Korrektheit der allgemeinen

Ableitung mit vollständiger Induktion nachweisen müssen. (Übung!) Hier fiel uns ohne Berechnung von Ableitungen alles in den Schoß.

Wir wollen das letzte Beispiel noch ein wenig dehnen.

Beispiel 9.28.
Wir betrachten für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-a}$. Wir wollen diese Funktion nun in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ entwickeln. Klar, wir gehen genauso vor wie im letzten Beispiel und erhalten

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(a+x_0)^{k+1}} (x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < |x_0+a|.$$

Wieder rechnen Sie bitte nach, daß der Konvergenzradius sich wie angegeben ergibt.

Nochmal einen Zacken schwerer aber natürlich eine Variationen desselben Themas.

Beispiel 9.29.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x^2)$. Wir wollen natürlich versuchen wie vorher vorzugehen. Wir berechnen also

$$(\arctan(x^2))' = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Hier ist das weitere Vorgehen nicht sofort offensichtlich aber nach ein wenig spielen ergibt sich

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k}$$

und dann damit

$$\frac{2x}{1+x^4} = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k+1}.$$

Gliedweise Integration ergibt

$$\begin{aligned}\operatorname{arctan}(x^2) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+2}}{4k+2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+2}}{2k+1}, \quad |x|<1.\end{aligned}$$

Ich erwähne nochmal, daß wir natürlich eigentlich das Restglied zu untersuchen haben, dieses hier aber durch die Benutzung der geometrischen Reihe entfällt. Die Leserin möge sich in allen Fällen fragen (und diese Frage beantworten) was das Restglied eigentlich ist, d.h. welchen Fehler man bei einer endlichen Approximation macht. Man kann an der Rechnung oben auch sehen, daß man hätte x^2 *in die* arctan*-Reihe aus Beispiel 9.26 hätte einsetzten könne. Es ist aber vernünftig die Berechnung systematisch zu erlernen!*

Beispiel 9.30.

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{1}{(1+x)^k}, \quad k\in\mathbb{N}$$

und wollen die Potenzreihendarstellung von f *im Entwicklungspunkt* $x_0 = 0$ *bestimmen. Auch dafür kann man wieder die geometrische Reihe*

$$g(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad |x|<1$$

verwenden. Man muß nur realisieren, daß f *im wesentlichen die* $k-1$*-te Ableitung von* g *ist da*

$$f^{(k-1)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Den Rest überlassen wir der Leserin zur Übung.

Übungsaufgabe 9.7.
Berechnen Sie die Taylor-Reihe (inklusive Konvergenzradius) mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ *von*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathsf{arctan}(2x)$$

sowie

$$f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathsf{log}(1 + x^3).$$

Wie sieht es mit einem anderen Entwicklungspunkt aus? Rechnen Sie direkt und mit einsetzen!

Für den Moment halten wir fest. Zur Berechnung von Potenzreihen kann man insbesondere verwenden:

- bekannte Reihen, vor allem die geometrische Reihe.
- gliedweise Differentiation und Integration.

Natürlich bleibt einem manchmal nichts übrig als die allgemeinen Ableitungen $f^{(n)}$ auszurechnen (Nachweis mit Induktion) und dann das Restglied zu untersuchen. Man sollte aber überlegen, ob sich dies durch die Behandlung der Funktion entlang der oben gegebenen Beispiele verhindern läßt.

9.12 Multiplikation von Potenzreihen

Wir haben in Abschnitt 9.5 das Cauchy-Produkt für Reihen definiert und es am Anfang von Abschnitt 9.10 auch schon einmal verwendet.
Wir wiederholen: Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ zwei Potenz-Reihen mit gemeinsamen Konvergenzintervall I. Dann ist das Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right)(x-x_0)^n$$

ebenfalls (absolut) konvergent auf I und die Summenfunktion ist das Produkt der Summenfunktionen der beiden Reihen.

Beispiel 9.31.
Wir zeigen $e^x e^y = e^{x+y}$ für

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k} \cdot y^k \cdot n!}{(n-k)! \cdot k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}_{=\binom{n}{k}} x^{n-k} \cdot y^k}_{=(x+y)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.
\end{aligned}$$

9.13 Division von Potenzreihen

Wenn wir an Potenzreihen als eine Form verallgemeinerter Polynome denken[5] könnten wir auf die Idee kommen, Potenzreihen mit einer Form verallgemeinerter Polynomdivision zu dividieren. Und genau das geht natürlich. Der Einfachheit halber setzen wir $x_0 = 0$.

Satz 9.29 (Division von Potenzreihen)**.**
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *habe die Summe* $f(x)$ *und es sei* $a_0 \neq 0$*. Dann kann die Funktion* $\frac{1}{f}$ *in einer gewissen Umgebung von* $x = 0$ *durch eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *dargestellt werden.*

Nach Satz 9.26 existiert die Potenzreihe von $g = \frac{1}{f}$ in einer Umgebung von $x = 0$. Um die Potenzreihe konkret auszurechnen, wenden wir die **Methode der unbestimmten Koeffizienten** an. Das heißt wir wollen eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ finden mit

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = 1.$$

mit dem Cauchy-Produkt gilt

$$a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0\right) x^k = 1.$$

Nach dem Identitätssatz müßen die Koeffizienten auf beiden Zeiten gleich sein, d.h.

$$a_0 b_0 = 1, \quad a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0 = 0, \quad n \geq 1.$$

[5] Ein Bild das nicht sehr weit trägt. Es gibt Potenzreihen, die haben gar keine Nullstellen während Polynome vom Grad n wenigstens eine (komplexe) Nullstelle haben müßen.

D.h. es gilt

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{a_0} \\ b_1 &= -\frac{a_1 b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2} \\ b_2 &= -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_0}{a_0} = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Analog berechnet man dann natürlich den Quotienten

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}$$

zweier Potenzreihen mit $b_0 \neq 0$. Auch da ist der Quotient in $x = 0$ analytisch und die Potenzreihenentwicklung (Taylor-Reihe) des Quotienten existiert damit in einer Umgebung von $x = 0$.

Beispiel 9.32.
Wir leiten eine Potenzreihendarstellung für $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *her. Wir setzen*

$$\tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + ...$$

da wir schon wissen, daß tan *eine ungerade Funktion ist, d.h.* $\tan(-x) = -\tan(x)$. *Da* $\tan(x)\cos(x) = \sin(x)$ *gilt*

$$\left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + ...\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Durch Vergleich der Koeffizienten folgt daraus

$$\begin{aligned} &a_1 \cdot 1 = 1, \quad a_3 \cdot 1 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!} \\ &a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!} \end{aligned}$$

und allgemein

$$a_{2n+1} - \frac{a_{2n-1}}{2!} + \frac{a_{2n-3}}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{a_1}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

Für hinreichend kleine $|x|$ ergibt sich damit

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots.$$

Man kann mit anderen Überlegungen zeigen, daß der Konvergenzradius dieser Reihe $R = \frac{\pi}{2}$ ist, man Sie also auf dem ganzen Definitionsbereich von tan *verwenden kann.*

9.14 Weitere Reihendarstellungen

Wir wollen noch kurz anreißen, was sonst noch möglich ist. Können wir beispielsweise für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ auch für $|x| > 1$ eine Darstellung in Form einer Reihe herleiten?

Wir rechnen

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}.\end{aligned}$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert für $|x| > 1$. Damit haben wir auch für diesen Bereich eine Reihendarstellung. Diese ist allerdings keine Potenzreihe. In diesem Fall ist es eine sogenannte **Laurent-Reihe**. Wir wollen es bei diesem Beispiel belassen. Wenn Sie eine Vorlesung zur Funktionentheorie hören, werden Sie in dieses Thema tiefer einsteigen.

9.15 Übungsaufgaben

Aufgabe 81

Zeigen Sie Anhand der Definition, daß die folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie ihre Summe.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$

Siehe Beispiel 9.2.

Aufgabe 82

Zeigen Sie, daß das Quotientenkriterium für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

versagt. Folgen Sie außerdem Beispiel 9.2 um zu zeigen, daß die Reihe konvergiert und berechnen Sie die Summe.

Aufgabe 83

Finden Sie Beispiele von Reihen die die Aussage (iii) in Satz 9.9 illustrieren, d.h. konvergente und divergente Reihen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $\displaystyle\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$.

Aufgabe 84

Benutzen Sie das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium um die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$, (iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log(k)}$, (v) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{1+k^4}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, (iv) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, (vi) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{k^2-2}}$.

Aufgabe 85

Benutzen Sie das Quotientenkriterium um die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{k!}}$,

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$,

(vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$,

(vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$,

(viii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (10+k)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}$.

Aufgabe 86

Benutzen Sie das Wurzelkriterium um die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{1+2^{2k}}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\left(3-\frac{1}{k}\right)^k}$,

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^k \sin^k\left(\frac{2}{k}\right)$,

(vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k+3^k}$.

Aufgabe 87

Untersuchen Sie die nachfolgenden Reihen mit dem Integralkriterium auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^3}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log(k)}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2(k)}$,

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4k+1}}$,

(vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$.

Aufgabe 88

Benutzen Sie das Leibniz-Kriterium um die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$, (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+3^k}$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$, (iv) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2^k}$.

Aufgabe 89

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Reihen absolut oder nicht-absolut konvergieren.

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$, (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$, (v) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{[\frac{3k}{2}]} \frac{1}{3^k}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$, (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$,

Dabei bezeichnet $[x]$ den ganzzahligen Teil von x, d.h. die größte ganze Zahl k mit $k \leq x$.

Aufgabe 90

Für die Fallgeschwindigkeit v eines Körpers in Abhängigkeit vom Fallweg s unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes ergibt sich

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}, \qquad s \geq 0.$$

Dabei ist m die Masse des fallenden Objekts, g die Erdbeschleunigung und k der Reibungskoeffizient.
Zeigen Sie, daß aus dieser Beziehung mittels des Grenzübergangs $k \to 0$ das bekannte Fallgesetz für den luftleeren Raum

$$v(s) = \sqrt{2gs}, \qquad s \geq 0$$

folgt.

Aufgabe 91

Für welche reellen x konvergieren jeweils die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n.$$

(Gleichmäßige Konvergenz)

Aufgabe 92

Berechnen Sie unter Verwendung der Potenzreihenentwicklung das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

mit einem Fehler unter 10^{-3}.
Hinweis: Ein Ausdruck in rationalen Zahlen genügt.

Aufgabe 93

1. Zeigen Sie, daß für $x \in [0,1]$ die Ungleichung
$$\frac{x}{2} \leq \log(1+x) \leq x$$
gilt.

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch
$$n \in \mathbb{N}: \quad p_n := \prod_{k=1}^{n}(1+a_k),$$
genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Aufgabe 94

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge mit $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, daß
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$$
für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. (Gleichmäßige Konvergenz?)

Aufgabe 95

Bestimmen Sie die Summen der nachfolgenden Reihen mit Hilfe von Potenzreihen.

(i) $\frac{1}{2^1\cdot 1} - \frac{1}{2^2\cdot 2} + \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^4\cdot 4} + \ldots,$

(ii) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots,$

(iii) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots,$

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n} \binom{1/2}{n}.$

Aufgabe 96

Der der Anfängerin so teure Glaube an die Wunderkräfte der Regel von Bernoulli/l'Hôpital, ist irrig und wird oft mit entnervenden Rechnungen gebüßt.[6] Berechnen Sie die untenstehenden Grenzwerte mittels Potenzreihen und zum Vergleich mit der Regel von Bernoulli/l'Hôpital. Siehe auch Abschnitt 6.22.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log^2(1+x)-\sin^2(x)}{1-e^{-x^2}}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$,

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\log(1+x)}{1-\sqrt{1+x^2}}$,

(vii) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\log(x)}\right)$,

(viii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}\right)$.

Aufgabe 97

Berücksichtigen Sie

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x)-\log(1-x) \quad x\in(-1,1)$$

um auf $(-1,1)$ eine Reihendarstellung für die Funktion $x\mapsto \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ zu finden. Das Ergebnis lautet

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x|<1.$$

Aufgabe 98

Eine *Teleskopsumme* ist eine Summe der Form $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$. Für diese gilt $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_1$.
Weisen Sie mit einer geeigneten Teleskopsumme nach, daß für alle $n\in\mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$

[6] Zitat von Harro Heuser. Von ihm sind auch die schönen Aufgaben dazu.

gilt, und bestimmen Sie damit den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Aufgabe 99

Für die Partialsummenfolge (s_n) einer Folge (a_k) gelte

$$s_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Bestimmen Sie die Glieder a_k der Folge (a_k) und sowie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 100

Berechnen Sie die Summen folgender Reihen:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^{2k+3}}$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}}$.

Aufgabe 101

Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{(2a)^k}$?

Aufgabe 102

Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$, und was ist der entsprechende Wert?

10 Komplexe Zahlen

Die komplexe Zahlen sind als Lösungen von Polynomgleichungen ins Leben gerufen worden. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung in den reellen Zahlen. Die Idee besteht darin $\sqrt{-1}$ als 'neue Zahl' einzuführen und damit einen Zahlenbereich aufzubauen. Beispiel: Es sei $x^2 - 2x + 3 = 0$ vorgelegt. Dann gilt nach pq-Lösungsformel

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2}.$$

Anstatt diese Lösung als nicht real zu verwerfen, nehmen wir sie einfach hin.

Präziser: Als komplexe Zahlen werden wir im Folgenden Zahlen der Form $z = a + \mathrm{i}b$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$ bezeichnen. Die so eingeführte Menge nennen wir $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} := \{a + \mathrm{i}b \colon \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir nennen a dabei den Realteil (wir schreiben $\mathrm{Re}(z)$) und b Imaginärteil (wir schreiben $\mathrm{Im}(z)$) der Zahl der $z = a + \mathrm{i}b$. Die Zahlen $a + \mathrm{i}0$ sind per Vereinbarung unsere vorher eingeführten reellen Zahlen und die Zahlen $0 + \mathrm{i}b$ nennen wir (rein) imaginäre Zahlen. Wir vereinbaren, daß wir für reelle Zahlen $a + \mathrm{i}0$ auch einfach wieder a schreiben und für imaginäre Zahlen $0 + \mathrm{i}b$ dann einfach $\mathrm{i}b$.

Welche Rechengesetze gelten? Es ist klar, wie wir zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$ **addieren** sollten:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + \mathrm{i}b_2 + a_2 + \mathrm{i}b_2 \\ &= (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Damit setzen wir die (binäre) Operation

$$\begin{cases} +\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to \quad \mathbb{C} \\ \quad (z_1, z_2) & \mapsto \quad z_1 + z_2 \end{cases}$$

mit

$$z_1 + z_2 = (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) + \mathrm{i}(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)).$$

Welche Eigenschaften hat $(\mathbb{C}, +)$? Als erstes stellen wir fest, daß die Addition umkehrbar ist, da mit $-z := -a_1 + \mathrm{i}(-b)$ gilt $z + (-z) = 0 + \mathrm{i}0 =: 0$. Dabei haben wir benutzt, daß jedes $x \in \mathbb{R}$ ein additiv Inverses Element $-x$ besitzt. Siehe dazu Abschnitt 2.1. Welche Eigenschaften haben wir noch? Die Addition der reellen Zahlen ist kommutativ. Gilt dies auch für die Addition komplexer Zahlen? Wir rechnen:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + \mathrm{i}b_1 + a_2 + \mathrm{i}b_2 \\ &= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=a_2+a_1} + \mathrm{i}\underbrace{(b_1 + b_2)}_{=b_2+b_1} \quad \text{da } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

Damit haben wir also, daß auch die Addition komplexer Zahlen kommutativ ist. Was ist mit der Assoziativität? Wir rechnen

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= ((a_1 + \mathrm{i}b_1) + (a_2 + \mathrm{i}b_2)) + (a_3 + \mathrm{i}b_3) \\ &= ((a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)) + (a_3 + \mathrm{i}b_3) \quad \text{(Def. Addition)} \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + \mathrm{i}((b_1 + b_2) + b_3) \quad \text{(Def. Addition)} \end{aligned}$$

Nun wenden wir in Real- und Imaginärteil die Assoziativität der reellen Zahlen an und erhalten

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= ((a_1 + a_2) + a_3) + \mathrm{i}((b_1 + b_2) + b_3) \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + \mathrm{i}(b_1 + (b_2 + b_3)) \\ &= (a_1 + \mathrm{i}b_1) + ((a_2 + a_3) + \mathrm{i}(b_2 + b_3)) \quad \text{(Def. Addition)} \\ &= (a_1 + \mathrm{i}b_1) + ((a_2 + \mathrm{i}b_2) + (a_3 + \mathrm{i}b_3)) \quad \text{(Def. Addition)} \\ &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß unsere Definition der Addition auch assoziativ ist.

Etwas komplizierter ist es, die Zahlen zu **multiplizieren**. Wir versuchen:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + \mathsf{i} b_1)(a_2 + \mathsf{i} b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathsf{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Damit führen wir die (binäre) Operation

$$\begin{cases} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \quad (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 \cdot z_2 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (&\mathsf{Re}(z_1)\,\mathsf{Re}(z_2) - \mathsf{Im}(z_1)\,\mathsf{Im}(z_2)) \\ &+ \mathsf{i}(\mathsf{Re}(z_1)\,\mathsf{Im}(z_2) + \mathsf{Re}(z_2)\,\mathsf{Im}(z_1)) \end{aligned}$$

ein. Wie in den reellen Zahlen vereinbaren wir $z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2$ wenn keine Mißverständnisse entstehen.
Der Nachweis der Assoziativität und Kommutativität ist nicht schwerer als für die Addition, wird aber an dieser Stelle der Leserin überlassen.

Hinweis: Schreiben Sie $z_1 \cdot z_2$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ jeweils aus, wenden Sie die Definition der Multiplikation und dann die Eigenschaften der reellen Zahlen an. Dann wieder die Definition der Multiplikation.

Wie steht es mit der Umkehrbarkeit der Multiplikation, d.h gibt es für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ein $w \in \mathbb{C}$ mit $zw = 1 + \mathrm{i}0 = 1$?
Als erstes fragen wir: wenn $z = a + \mathrm{i}b \neq 0$, wie berechnen wir $\frac{1}{z}$? Wir haben $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\mathrm{i}b}$ und bedienen uns einer Idee aus der Schule[1]. Mit den binomischen Formeln und den oben vereinbarten Rechenregeln gilt $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$. Dies benutzen wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+\mathrm{i}b}\\ &= \frac{1}{a+\mathrm{i}b}\cdot\frac{a-\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= (a_1+\mathrm{i}b_1)\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2} + \mathrm{i}\frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)\\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \mathrm{i}\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.\end{aligned}$$

Als letztes bleibt noch zu untersuchen, wie sich Multiplikation und Addition vertragen. In den reellen Zahlen haben wir das Distributivgesetz. Was gilt in den komplexen Zahlen? Wir rechnen

$$\begin{aligned}z_1(z_2+z_3) &= z_1\left((a_2+a_3)+\mathrm{i}(b_2+b_3)\right) \text{(Def. Addition)}\\ &= \ldots \text{(Def. Multiplikation)}\\ &= z_1z_2 + z_1z_3.\end{aligned}$$

Das Ausfüllen der ... bleibt der Leserin als Übungsaufgabe überlassen.

[1]Rational-machen des Nenners.

Wir geben die folgende formale

Definition 10.1.
Als komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Menge

$$\mathbb{C} := \{a + \mathrm{i}b\colon\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

mit den oben eingeführten (binären) Operationen

$$+\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C} \quad \textit{und} \quad \cdot\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}.$$

Die Operationen $+$ und $\cdot$ erfüllen dabei die folgenden Axiome:

1. *Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{C}$ mit $z + 0 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*
2. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $z' \in \mathbb{C}$ mit $z + z' = 0$.*
   Dieses z' wird auch mit $-z$ bezeichnet.
3. *Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt $(z_1 + z_2) + z_3 = z_2 + (z_2 + z_3)$.*
4. *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.*
5. *Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot 1 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*
6. *Für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $zw = 0$.*
   Dieses w wird auch mit $\frac{1}{z}$ bzw. z^{-1} bezeichnet.
7. *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1z_2 = z_2z_1$.*
8. *Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.*
9. *Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.*

Bemerkung 10.1.
In der Elektrotechnik wird anstelle von i *of* j *verwendet um nicht in Konflikt mit der Standardbezeichnung für den Strom zu geraten.*

10.1 Konjugation

Die komplexen Zahlen kommen in natürlicher Weise mit einer weiteren Operation, der sogenannten **Konjugation**:

$$\begin{cases} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \quad z & \to & \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z). \end{cases}$$

Die Zahl $\overline{z}$ heißt das **konjugiert komplexe** von z. Diese Operation hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{\overline{z}} = z$. (Involution)

(ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(iii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(iv) Für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gilt $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$.

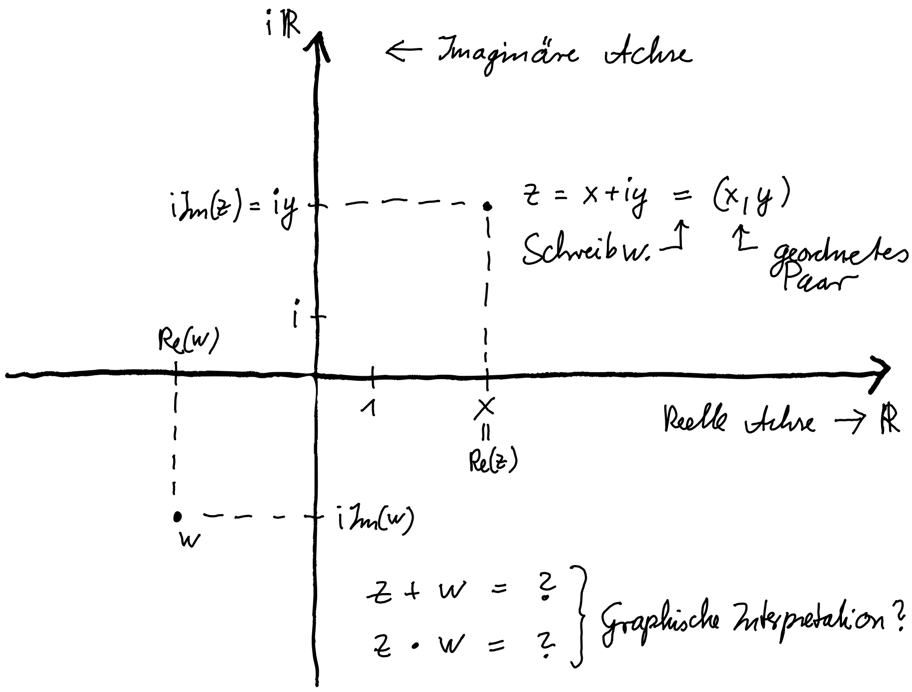
(v) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}).$$

Übungsaufgabe 10.1.
Interpretieren Sie die Konjugation komplexer Zahlen in der Gaußschen Ebene, wenn Sie die erste Seite von Abschnitt 10.2 gelesen haben.

10.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Wir haben in der Vorlesung sehr oft die Vorstellung benutzt, daß die reellen Zahlen auf einer Geraden angeordnet sind. Nach Carl Friedrich Gauß[2] kann man sich die komplexen Zahlen auch veranschaulichen. Dazu interpretiert man Real- und Imaginärteil der Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ als den Punkt (x, y) der Ebene; diese Interpretation wird als Gaußschen Zahlenebene bezeichnet.



Übungsaufgabe 10.2.
Zeichnen Sie die Zahlen $z = -2 - \mathrm{i}3$ und $w = 1 + \mathrm{i}1$ sowie $z + w$. Interpretieren Sie die Addition $z + w$ graphisch.

[2] 1777-1855

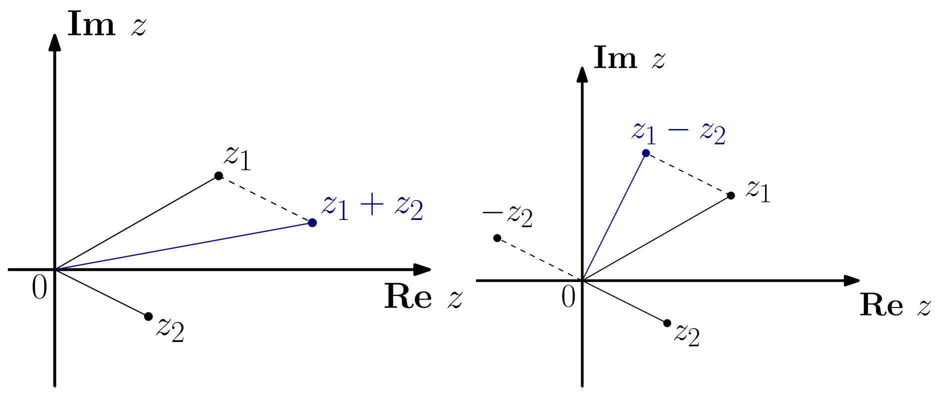


Abbildung 10.1: Veranschaulichung der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen un der Gaußschen Ebene.
Beachten Sie die Analogie zur Vektoraddition.

Die Addition zweier komplexer Zahlen nach der von uns eingeführten Definition lässt sich in der Zahlenebene einfach als die aus der Schule bekannte Addition von Vektoren mit der Parallelogrammregel veranschaulichen wenn z als der Vektor $\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z) \end{bmatrix}$ und w als der Vektor $\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(w) \\ \mathrm{Im}(w) \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt wird. (Die Zeiger/Pfeile sind hier am Ursprung fixiert!)

Man kann sich auch die Multiplikation veranschaulichen. Dazu brauchen wir allerdings noch ein paar kleinere Überlegungen.

Übungsaufgabe 10.3.
Zeichnen Sie die Zahlen $1 + \mathrm{i}$, 1, $1 - \mathrm{i}$ *in die Zahlenebene sowie alle drei mit* i *multipliziert. Stellen Sie eine Vermutung auf, was die Multiplikation mit* i *graphisch in der Zahlenebene bewirkt.*

Wir beschließen den Abschnitt mit der Antwort auf Aufgabe 10.1.

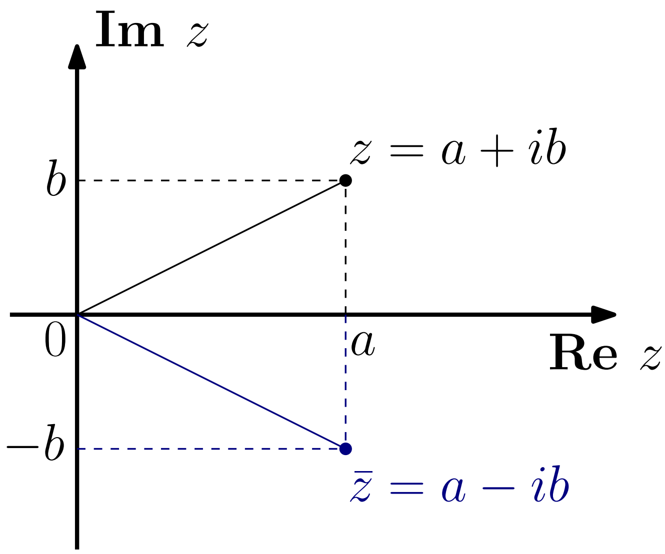


Abbildung 10.2: Eine komplexe Zahl z veranschaulicht man sich als Punkt der Gaußschen Zahlenebene mit den Koordinaten $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. Das konjugiert komplexe veranschaulicht man sich durch den Punkt $(\mathrm{Re}(z), -\mathrm{Im}(z))$, d.h. einer Spiegelung an der reellen Achse.

10.3 Polarform

Wir wissen aus der Schule (und zum Teil Kapitel 4), daß ein Punkt (u, v) der Ebene mit $u^2 + v^2 = 1$ auf dem Einheitskreis liegt. Das heißt es gibt ein (bis auf ein Vielfaches von 2π) bestimmtes φ mit $(u, v) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Wenn $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$, dann können wir schreiben

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\Big(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{u}, \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{=v}\Big).$$

Der Winkel φ von $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ heißt das **Argument** von z. Die Zahl $\sqrt{x^2 + y^2}$ wird **Betrag** von z genannt und mit $|z|$ bezeichnet.
Die Berechnung von $\varphi = \arg(z)$ erfolgt beispielsweise durch

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : \ x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : \ x < 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & : \ x = 0, \ \pm y > 0 \end{cases}$$

Das Argument $\arg(z)$ ist, wie oben schon erwähnt nicht eindeutig bestimmt. So ist beispielsweise $\arg(1) = 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Mit unseren Bemerkungen am Anfang der Sektion erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\arg(z)), \sin(\arg(z))) \\ &= r(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Die rechte Seite wird **Polarform** von z genannt. Obgleich $\arg(0)$ gar nicht bestimmt ist, können wir $z = 0 \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ für ein beliebiges φ schreiben. Damit hat jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine Polarformdarstellung.

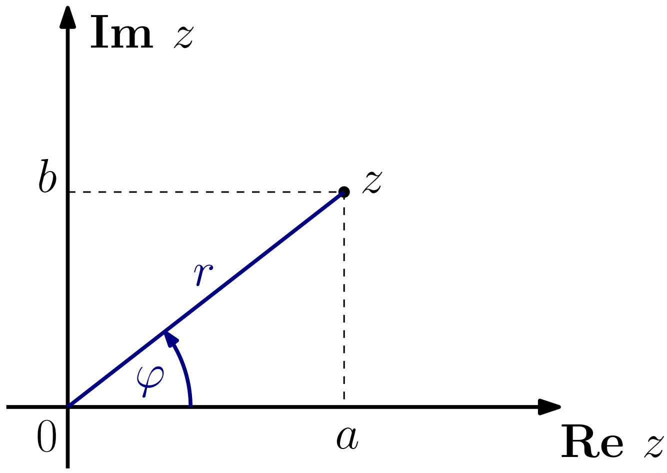


Abbildung 10.3: Illustration der Polarform.

Beispiel 10.1.
Wir geben ein paar Beispiele an:

(i) $1 = 1(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0))$,

(ii) $-1 = 1(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi))$,

(iii) $\mathrm{i} = 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}))$,

(iv) $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}))$.

Die Leserin ist angehalten die Beispiele zu zeichnen.

Mit diesen Überlegungen können wir zu der in Aufgabe 10.3 vorbereiteten Frage kommen. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl mit $z = r\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}z &= (\cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2})) \cdot r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \\
&= r \cdot \Big(\big(\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\varphi) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\varphi)\big) \\
&\qquad + \mathrm{i}\big(\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\varphi) + \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\varphi)\big)\Big) \\
&= r \cdot \Big(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \frac{\pi}{2})\Big) \qquad \text{(Additionstheoreme)} \\
&= r\,(-\sin(\varphi) + \mathrm{i}\cos(\varphi))\,.
\end{aligned}$$

Die Multiplikation $\mathrm{i} \cdot z$ dreht z um 90° um den Ursprung. Im allgemeinen, für bel. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ haben wir

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)) \cdot |z_2|(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)) \\
&= |z_1||z_2|\Big(\big(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big) \\
&\qquad + \mathrm{i}\big(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big)\Big) \\
&= |z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)
\end{aligned}$$

Wir haben damit folgende Regel gezeigt:

> Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden **Beträge multipliziert** und **Argumente addiert**. (Drehstreckung/Drehstauchung)

Daraus ergibt sich natürlich auch eine graphische Interpretation der Division komplexer Zahlen:

> Bei der Division komplexer Zahlen werden **Beträge dividiert** und **Argumente subtrahiert**. (Drehstreckung/Drehstauchung)

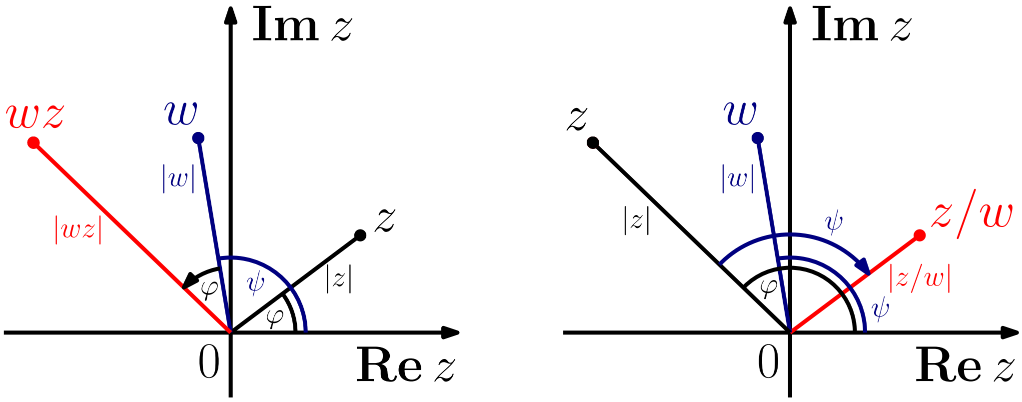


Abbildung 10.4: Darstellung der Multiplikation (links) und Division (rechts) zweier komplexer Zahlen z und w.

Übungsaufgabe 10.4.
Berechnen Sie die Polarformen und mit diesen die paarweisen Produkte der angegebenen komplexen Zahlen:

(i) $1 + \mathrm{i}$,

(ii) $-1 + \mathrm{i}$,

(iii) $-1 - \mathrm{i}$,

(iv) $1 - \mathrm{i}$.

Wir fassen noch ein paar Eigenschaften von $|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, $|z| = \sqrt{\mathsf{Re}(z)^2 + \mathsf{Im}(z)^2}$ zusammen:

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

(ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(iii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(iv) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Wie in den reellen Zahlen Definieren wir den Abstand zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 durch $|z_1 - z_2|$; für entsprechende Aussagen siehe Seite 63. Die Leserin sollte sich durch Rechnung überzeugen, daß die obigen und die entsprechenden für den Abstand tatsächlich gelten.

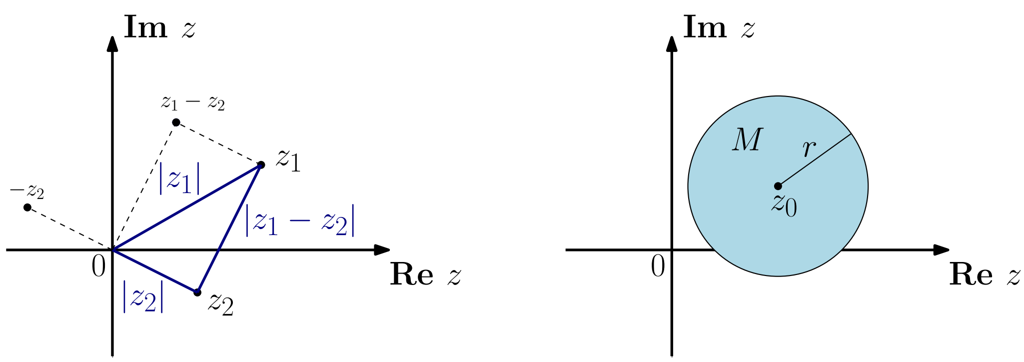


Abbildung 10.5: Im ersten Bild sind Betrag und Abstand zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 dargestellt. Die Menge M im zweiten Bild ist gegeben durch $M = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| < r\}$. Die Kreislinie, der Rand von M ist gegeben durch $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| = r\}$.

10.4 Potenzen und Wurzeln

Hier wollen wir uns der Aufgabe widmen, $n$te-Wurzeln aus komplexen Zahlen zu ziehen. Zu Beginn suchen wir alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1.$$

Die Lösungen werden die $n$ten **Einheitswurzeln** genannt. Wir schreiben zuerst

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)).$$

Mit unseren Überlegungen aus der letzten Sektion erhalten wir

$$\begin{aligned} z^n &= r^n(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n \\ &= r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

Diese Formel wird auch **Formel von de Moivre** genannt. Damit folgt schon mal $r = 1$, alle $n$ten Einheitswurzeln liegen also auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$. Da $\sin(n\varphi) = 0$ und $\cos(n\varphi) = 1$ gelten soll erhalten wir

$$n\varphi = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Im Prinzip kommen alle $k \in \mathbb{Z}$ für die Argumente in Frage. Da aber für das Argument

$$\frac{2(k+1)}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2\pi$$

die gleiche komplexe Zahl herauskommt wie für das Argument $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, reicht es $k = 0, 1, \ldots n-1$ zu betrachten um tatsächlich verschiedene Lösungen zu erhalten. Die $n - ten$ Einheitswurzeln sind also gegeben durch

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Wir wollen nun sehen, ob wir, was wir bis daher gelernt haben benutzen können um die Gleichung

$$z^2 = \mathrm{i}$$

zu lösen. Wir schreiben

$$\mathrm{i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2})$$

und damit

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)^2 \\ &= r^2\big(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)\big) = \cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Also ist $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Wie zuvor bleiben nur die Argumente mit $k = 0, 1$ als verschiedene Lösungen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}), \\ z_2 &= \cos(\frac{\pi}{4} + \pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4} + \pi) = -z_1 \end{aligned}$$

also

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \pm\frac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

Wir fassen unsere Überlegungen zusammen:

Satz 10.1 (Potenzieren und Radizieren in $\mathbb{C}$)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ dann gilt:

(i) Die $n-$te Potenz von $z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ ergibt sich zu

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Insbesondere gilt die ***de Moivresche Formel***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

(ii) Für jede Zahl $z = |z|e^{i\varphi}$ besitzt die Gleichung $w^n = z$ genau n verschiedene Lösungen

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

mit $k = 0, \dots, n-1$.

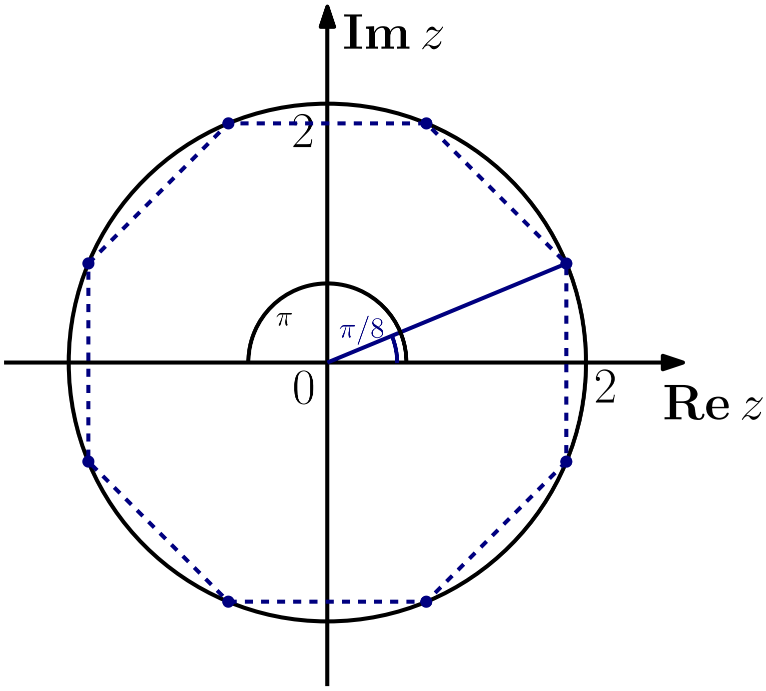


Abbildung 10.6: Graphische Illustration der Wurzeln am Beispiel der 8-ten Wurzeln von $-256 = 256e^{i\pi}$. Die Wurzeln bilden stets ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben in einen Kreis mit dem Radius $\sqrt[8]{|z|}$.

10.5 Die komplexe Exponentialfunktion

Wir erweitern die Definition der Exponentialfunktion von $\mathbb{R}$ auf die komplexen Zahlen.

Definition 10.2 (Komplexe Exponentialfunktion)**.**
*Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die **komplexe Exponentialfunktion***

$$\begin{cases} \mathrm{exp}\colon \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \mathrm{exp}(z) \end{cases}$$

durch

$$\mathrm{exp}(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(z))).$$

Wir schreiben dann auch wieder e^z für $\mathrm{exp}(z)$*.*

Wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$, dann ist die komplexe Exponentialfunktion einfach die reelle Exponentialfunktion. Für $\mathrm{Re}(z) = 0$ ergibt sich:

$$e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = \cos(\mathrm{Im}(z)) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(z)). \tag{10.5.1}$$

Dies ist die berühmte **Euler-Formel**: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{ix} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x).$$

Damit haben wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ die sogenannte **Exponentialdarstellung**

$$z = |z|\,\mathrm{exp}(\mathrm{i}\arg(z)) = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}.$$

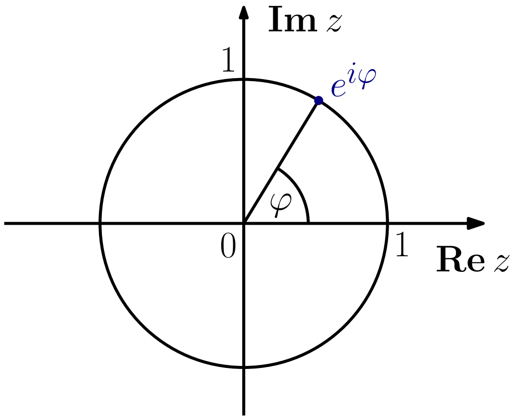


Abbildung 10.7: Illustration der Exponentialdarstellung/Polarform $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$.

Die komplexe Exponentialfunktion hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\text{exp}(0) = 1$.

(ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\text{exp}(z_1 + z_2) = \text{exp}(z_1)\,\text{exp}(z_2)$.

(iii) Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt $\text{exp}(-z) = \frac{1}{\text{exp}(z)}$.

(iv) Die komplexe Exponentialfunktion ist $2\pi\text{i}$ periodisch, d.h.

$$\text{exp}(z) = \text{exp}(z + 2k\pi\text{i}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

für alle $z \in \mathbb{Z}$.

Wenn man die Funktionen sin und cos durch die Definitionen

$$\cos(z) = \text{Re}(e^{\text{i}z}) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \text{Im}(e^{\text{i}z})$$

fortsetzt, dann ergibt sich die Eulersche Formel für alle $z \in \mathbb{C}$ zu

$$e^{\text{i}z} = \cos(z) + \text{i}\sin(z).$$

Wenn Sie Funktionentheorie studieren, dann werden Sie die Eigenschaften dieser Funktion in der Tiefe diskutieren. Wir brauchen für das weitere nur die komplexe Exponentialfunktion um die Exponentialform komplexer Zahlen zu verstehen.

10.6 Komplexe Polynome

Bei der Bestimmung $n-$ter Wurzeln wurden Gleichungen der Form

$$z^n - a = 0$$

gelöst. Wir wollen die Frage der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen allgemeiner untersuchen. Hierzu folgende Terminologie: Eine Funktion der Form

$$\begin{cases} p : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \end{cases}$$

mit festen **Koeffizienten** $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ heißt komplexes **Polynom** vom **Grad** $\deg(p) = n$. Eine Zahl $w \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von p, falls $p(w) = 0$. Besitzt ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ eine Nullstelle w, so läßt sich p ohne Rest durch $(z - w)$ teilen, d.h. es gibt ein Polynom q von Grad $n - 1$ mit

$$p(z) = (z - w)\, q(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Anders als in $\mathbb{R}$ gilt in den komplexen Zahlen folgende Aussage:

Satz 10.2 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine ***komplexe*** *Nullstelle.*

Bemerkung 10.2.
Zur Erinnerung: Wir hatten mit dem Zwischenwertsatz gezeigt, daß jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten mindestens eine reelle Nullstelle haben muß. Das dies nicht für Polynome geraden Grades gilt sollte sich die Leserin nochmals überlegen, sollte das nicht offensichtlich sein.

Von jedem Polynom p mit Grad $n \geq 1$ kann man also einen Linearfaktor abspalten.[3] Ist der verbleibende Rest mindestens vom Grad 1, kann man dies natürlich erneut Satz 10.2 anwenden und dies induktiv fortführen bis man n Faktoren abgespalten hat. Wir halten fest:

[3] Polynomdivision

Satz 10.3.
Das Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Dann existieren komplexe Zahlen $w_1, \ldots, w_n$ mit

$$p(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2) \ldots (z - w_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - w_k). \qquad (10.6.1)$$

Jedes komplexe Polynom hat also sogar n Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) und zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

Die Berechnung der Nullstellen gemäß Satz 10.2 und Satz 10.3 ist i. Allg. nur numerisch möglich. Ausnahmen bilden n-te Wurzeln oder quadratische Gleichungen mit **reellen** Koeffizienten:

Satz 10.4. *Die komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung*

$$z^2 + pz + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

sind gegeben durch

$$z_\pm = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q \geq 0, \\ -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q < 0. \end{cases}$$

Übungsaufgabe 10.5.
Geben Sie die komplexen Lösungen von $z^2 - 4z + 5 = 0$ an.

Das Auftreten konjugiert komplexer Zahlen in der p-q-Formel läßt sich verallgemeinern:

Satz 10.5.
Sind die Koeffizienten des Polynoms

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

allesamt reell, so sind die Nullstellen reell ($\lambda_j \in \mathbb{R}$) oder treten in konjugiert komplexen Paaren ($\alpha_j \pm i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$) auf.
Es existiert eine Zerlegung der Form

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \lambda_j) \prod_{j=1}^{m} ((z - \alpha_j)^2 + \beta_j^2), \tag{10.6.2}$$

*wobei $k + 2m = n$. Jedes **reelle Polynom** läßt sich also als Produkt von Linearfaktoren und quadratischen Polynomen schreiben.*

Übungsaufgabe 10.6.
Geben Sie Zerlegungen von $p(z) = z^3 + z$ gemäß (10.6.1) und (10.6.2) an.

10.7 Exkurs: Differentialgleichungen und komplexe Zahlen

Wir erinnern uns, daß für die reelle Funktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ gilt

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Einige Wachstums- und Zerfallsprozeß sind durch Gleichungen der Form

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0 \tag{10.7.1}$$

beschrieben (ignorieren Endlichkeit der Ressourcen), d.h. die (momentane) Änderungsrate der Größe ist proportional zur Größe selbst. Beispiele:

- Abkühlungsprozesse,
- Bakterienwachstum (Anzahl),
- Radioaktiver Zerfall,
- ....

eine solche Gleichung heißt Differentialgleichung. Wir suchen eine Funktion, die in einer Umgebung von $t = 0$ definiert ist und für die die Gleichung $y' = \lambda y$ auf der Umgebung gilt mit $y(0) = y_0$. Dabei heißt y_0 Anfangsbedingung.
Hier können wir unser bisher angesammeltes Wissen nutzen. Offensichtlich ist

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

eine Lösung von 10.7.1. Man kann sogar zeigen, daß es keine weiteren Lösungen gibt.
Etwas schwieriger betrachten wir das folgende Problem: Sei $x(t)$ die Auslenkung einer an einer Feder befestigten Masse m aus der Ruhelage/ Die Trägheitskraft ist gegeben durch Masse mal Beschleunigung $m \cdot x''$ und die Rückstellkraft der Feder ist $-kx'(t)$ wobei k die Federkonstante ist. Das Newtonsche Gesetz $F = ma$ gibt dann

$$mx'' + kx = 0.$$

Dies ist wieder eine Differentialgleichung, diesmal aber nicht nur mit ersten sondern auch mit zweiten Ableitungen. Die allgemeine Theorie ist etwas aufwendiger zu entwickeln aber wir wollen einfach mutig sein und $x(t) = ce^{\lambda t}$ einsetzen und sehen, ob wir nicht für bestimmte λ (wohl abhängig von k und m) eine Lösung berechnen können:

$$x'(t) = c\lambda e^{\lambda t}, \quad x''(t) = c\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Wenn wir in die Gleichung einsetzten bekommen wir

$$\begin{aligned} mx'' + kx &= mc\lambda^2 e^{\lambda t} + kce^{\lambda t} \\ &= c(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also die Bedingung

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

zu erfüllen also $\lambda \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$. Dann erhalten wir zwei Lösungen

$$x_1(t) = ce^{\sqrt{-\frac{k}{m}}t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = ce^{-\sqrt{-\frac{k}{m}}t}.$$

Da nun aber der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist (sowohl die Masse m als auch die Federkonstante k sind positiv), erhalten wir komplexe Lösungen:

$$x_1(t) = ce^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = ce^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t}.$$

Was soll das sein? Wir haben mit einem physikalischen Problem (harmonischer Oszillator) begonnen und erwarten natürlich auch physikalisch sinnvolle Lösungen.

Nach unseren Diskussionen in den letzten Sektionen, insbesondere der Euler-Formel, erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= ce^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ &= c\big(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \mathrm{i}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= ce^{-\mathsf{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\
&= c\big(\cos(-\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \mathsf{i}\sin(-\sqrt{\frac{k}{m}}t)\big) \\
&= c\big(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - \mathsf{i}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\big) = \overline{x_1}(t).
\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß für $A, B \in \mathbb{C}$ auch $Ax_1 + Bx_2$ eine Lösung der Differentialgleichung ist (Superposition (von Schwingungen)). Da wir reelle Lösungen haben wollen ($z \in \mathbb{C}$ ist genau dann reell, wenn $\overline{z} = z$):

$$\begin{aligned}
Ax_1 + Bx_2 &= \overline{Ax_1 + Bx_2} = \overline{A}\overline{x}_1 + \overline{B}\overline{x}_2 \\
&= \overline{A}x_2 + \overline{B}x_1.
\end{aligned}$$

Damit muß $A = \overline{B}$ und $B = \overline{A}$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ax_1(t) + Bx_2(t) = Ax_1 + \overline{A}x_2(t) \\
&= Ac\big(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \mathsf{i}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\big) \\
&\qquad + \overline{A}c\big(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - \mathsf{i}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\big) \\
&= (A + \overline{A})\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \mathsf{i}(A - \overline{A})\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\
&= 2\,\mathrm{Re}(A)c\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - 2\,\mathrm{Im}(A)c\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)
\end{aligned}$$

Da Real- und Imaginärteil von A voneinander unabhängig sind, können wir die Konstanten umbenennen und erhalten

$$x(t) = C_1 \cos\big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\big) + C_2 \sin\big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\big)$$

als reelle Lösung. Die Werte der Konstanten wären für ein konkretes Problem mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = x_1$ zu bestimmen.
Man hätte am Anfang zwar raten können, daß $x_1(t) = a_1 \cos(b_1 t)$ und $x_2(t) = a_2 \sin(b_2 t)$ Lösungen sind und durch einsetzten die Parameter bestimmen, der Aufbau einer allgemeinen Theorie ist so allerdings nicht möglich. Wir werden das weitere zum Thema gewöhnliche Differentialgleichungen in Mathematik 3 sehen.

10.8 Exkurs: Komplexe Wechselstromrechnung

In der Wechselstromtechnik treten häufig sinus-/cosinusförmige Spannungs- bzw. Stromverläufe auf:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t) \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

(I_m, U_m Amplituden, t Zeit, $\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz, f Frequenz (Netz in D: $f = 50\,\mathrm{Hz}$))
Der Winkel φ charakterisiert die im allgemeinen auftretende **Phasenverschiebung** zwischen Strom und Spannung.

Ursache für die Phasenverschiebung sind verschiedene 'Arten' von Widerständen im Wechselstromkreis:

- **Ohmscher Widerstand** R:
  $U_m = R\,I_m$, keine Phasenverschiebung,
- **Induktivität** L (Spule):
  $U_m = \omega L I_m$, Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$,
  Hintergrund Selbstinduktion/Lenzsches Gesetz,
- **Kapazität** C (Kondensator):
  $U_m = \frac{1}{\omega C}\, I_m$, Phasenverschiebung -$\frac{\pi}{2}$,
  Hintergrund: fortwährende Ladungs-/Entladungsvorgänge.

Es müssen also nicht nur die reellen Proportionalitätsfaktoren, sondern auch die Phasenverschiebungen beachtet werden.

Trick:

> Verwende zur Berechnung komplexe Ströme und Spannungen und interpretiere dabei nur den Realteil:
>
> $$i(t) = I_m e^{i\omega t}, \qquad u(t) = U_m e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Mit folgenden **komplexen** Widerständen $\tilde{R}$ gilt dann das Ohmsche Gesetz $u(t) = \tilde{R}\, i(t)$ auch hier:

- Ohmscher Widerstand $R \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} u(t) &= U_m e^{i\omega t} \\ &= RI_m e^{i\omega t} \\ &= Ri(t), \end{aligned}$$
- Induktiver Widerstand $R_L = i\omega L$:
$$\begin{aligned} u(t) &= U_m e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\ &= i\omega L\, I_m e^{i\omega t} \\ &= R_L i(t) \qquad \text{(beachte } i = e^{i\frac{\pi}{2}}\text{)} \end{aligned}$$
- Kapazitiver Widerstand $R_C = -i\frac{1}{\omega C}$:
$$\begin{aligned} u(t) &= U_m e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \\ &= -\frac{i}{\omega C} I_m e^{i\omega t} \\ &= R_C i(t) \quad \text{(beachte } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}\text{)} \end{aligned}$$

Für einen komplexen Widerstand R bezeichnet man Re(R) als **Wirk**- und Im(R) als **Blindwiderstand**. Ohmsche Widerstände sind reine Wirkwiderstände, kapazitive und induktive reine Blindwiderstände.

Vorteile der komplexen Wechselstromrechnung:

- Das Ohmsche Gesetz gilt wie gewohnt (für die Realteile gilt es nicht!),
- **Phasenverschiebung** arg(R) und **Scheinwiderstand** $|R| = U_m/I_m$ werden gleichzeitig erfaßt,
- Die Kirchhoffschen Gesetze und ihre Folgerungen gelten damit auch im Wechselstromkreis, z. B.
$$R = R_1 + R_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
für Reihen-/Parallelschaltung zweier Widerstände.

10.9 Übungs- und Anwendungsaufgaben

Aufgabe 103

Es sei $z_1 = 2 - \mathrm{i}$ und $z_2 = 3 + 4\mathrm{i}$. Berechnen Sie:

(i) $z_1 + z_2$,

(ii) $z_1 - z_2$,

(iii) $z_1 \cdot z_2$,

(iv) $z_1 \cdot \overline{z_2}$,

(v) $\frac{z_1}{z_2}$,

(vi) $\overline{z_1 \cdot z_2}$,

(vii) z_1^2,

(viii) $|z_1|$,

(ix) $\frac{z_2}{z_1}$.

Aufgabe 104

Welche der folgenden Aussagen sind für alle komplexen Zahlen richtig? Geben Sie wenn nötig ein Gegenbeispiel bzw. einen Beweis.

(i) $|z|^2 = z^2$,

(ii) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,

(iii) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$,

(iv) $|z| = |-\overline{z}|$,

(v) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$,

(vi) $|\mathrm{i}z| = |z|$.

Aufgabe 105

Welche komplexen Zahlen erfüllen die nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen. Zeichnen Sie die entsprechenden Lösungsmengen in der Gaußschen Zahlenebene.

(i) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$,

(ii) $1 \leq |z - 2| \leq 4$,

(iii) $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)$,

(iv) $|z + 1| \leq |z - 1|$.

Aufgabe 106

Wechseln Sie für die nachfolgenden komplexen Zahlen von der trigonometrischen in die arithmetische Darstellung bzw. umgekehrt:

(i) $6\mathrm{i}$,

(ii) $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$,

(iii) $5-\mathrm{i}5$,

(iv) $|z|=1$, $\arg(z)=\frac{2\pi}{3}$.

Aufgabe 107

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 5-5\mathrm{i}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Führen Sie die nachfolgenden Operationen in trigonometrischer Darstellung aus und geben Sie das Ergebnis in arithmetischer Darstellung an:

(i) $z_1 \cdot z_2$,

(ii) $\frac{z_1}{z_2}$,

(iii) z_1^6.

Aufgabe 108

Mit Hilfe der Eulerschen und der de Moivreschen Formel lassen sich Beziehungen für trigonometrische Funktionen zeigen, z. B.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ($\sin^n x := (\sin x)^n$, analog für cos)
- $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$,
- $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Beweisen Sie einige (besser alle) dieser Beziehungen.

Aufgabe 109

Drei harmonische Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz überlagern sich:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= -\sqrt{3}\cos(\omega t),\\
y_2(t) &= \sqrt{2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}),\\
y_3(t) &= \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}).
\end{aligned}$$

Die Überlagerung $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ ergibt eine neue harmonische Schwingung

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

mit derselben Kreisfrequenz ω, der Amplitude A und dem Phasenwinkel φ. Bestimmen Sie A und φ durch den Übergang zur komplexen Form diesen Problems.

Aufgabe 110

Diese Aufgabe ist aus [8] Seite 210. Durch ungestörte mechanische Überlagerung (Superposition) der beiden gleichfrequenten mechanischen Schwingungen gleicher Raumrichtung

$$\begin{aligned}
y_1 &= 8\text{cm}\cdot\sin\left(\pi\text{s}^{-1}\cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und}\\
y_2 &= 10\text{cm}\cdot\sin\left(\pi\text{s}^{-1}\cdot t - \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

entsteht eine resultierende Schwingung der gleichen Frequenz. Bestimmen Sie die Amplitude $A > 0$ und den Phasenwinkel φ dieser in der Sinusform

$$y_1 + y_2 = A\cdot\sin\left(\pi\text{s}^{-1}\cdot t + \varphi\right)$$

darzustellenden Gesamtschwingung mit Hilfe der Komplexen Rechnung. (Siehe Aufgabe 4.3 auf Seite 135)

Aufgabe 111

Drücken sie $\cos(4\varphi)$ als rationale Funktion von $\cos(\varphi)$ aus.
Hinweis: Moivresche Formel(n).

Aufgabe 112

Bestimmen Sie den Grenzwert der nachfolgenden komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) $a_n = \dfrac{n\mathrm{i}}{n+i}$,

(ii) $a_n = \dfrac{n}{(n-z)z}$

für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Aufgabe 113

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der nachfolgenden komplexen Reihen.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{k+\mathrm{i}}$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{\mathrm{i}}{n}\right)^2$.

Aufgabe 114

1. Berechnen Sie $z = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{21}$. Geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an.
2. Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung
$$(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 16) = 0.$$
3. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die beide der folgenden Bedingungen erfüllen
$$(\mathrm{Re}\, z)^2 \geq 1 \quad \text{und} \quad |z-1| \leq 3.$$

Aufgabe 115

1. Gegeben sind $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ und $z_2 = 2e^{\frac{5}{4}\pi i}$. Berechnen Sie $\dfrac{z_1}{z_2}$ und z_1^{12}. Geben Sie die Ergebnisse in kartesischer Form an.
2. Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^4 = -i.$$
3. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die beide der folgenden Bedingungen erfüllen
$$|z-1+i| = |z+1-i| \quad \text{und} \quad |z|^2 \leq 1.$$

Aufgabe 116

1. Gegeben sind $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ und $z_2 = 2e^{\frac{5}{4}\pi i}$. Berechnen Sie $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$ und ${z_1}^{42}$. Geben Sie die Ergebnisse in kartesischer Form $a + bi$ an.

2. Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^3 = i.$$

3. Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt
$$z^2 - 8z + 25 = 0$$
und zeichnen Sie die Lösungen in die Gaußsche Zahlenebene.

A Vollständigkeit

B Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben

B.1 Lösung von Aufgabe 3.13

Vorgelegt ist eine beliebige beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da jede Folge eine monotone Teilfolge besitzt (Satz 3.1) haben wir eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist auch die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach dem Satz der monotonen Konvergenz (Satz 3.8) ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Der Grenzwert von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist damit ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also hat jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungspunkt.

Literaturverzeichnis

[1] Robert A. Bjork John Dunlosky, and Nate Kornell *Self-Regulated Learning: Beliefs, Techniques, and Illusions*, Annual Review of Psychology, 64(1) (2013). doi:10.1146/annurev-psych-113011-143823.

[2] Aimee A. Callender and Mark A. McDaniel *The limited benefits of rereading educational texts*, Contemporary Educational Psychology, 34 (2009), 30–41. doi:10.1016/j.cedpsych.2008.07.001.

[3] Jean-Paul Delahaye π *die Story*, Birkhäuser, 1999. ISBN 3-7643-6056-9

[4] John Dunlosky, Katherine A. Rawson, Elizabeth J. Marsh, and Elizabeth J. Marsh *Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques: Promising Directions From Cognitive and Educational Psychology*, Psychological Science in the Public Interest, 14(1) (2013), 4–58. doi:10.1177/1529100612453266.

[5] Paul Halmos *Naive Mengenlehre*, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, Korrig. 2. Druck der 1993 Auflage. ISBN 978-0387900933.

[6] Zbigniew Michalewicz and David B. Fogel *How to Solve It: Modern Heuristics*, Springer, 2. Auflage, 2004. ISBN 9783540224945.

[7] Nicholas Mousoulides and Bharath Sriraman *Heuristics in Mathematics Education* in Encyclopedia of Mathematics Education, Springer, New York, pp. 253–255 (2014). doi:10.1007/978-94-007-4978-8_172

[8] Lothar Papula Übungen zur Mathematik für Ingenieure.: Anwendungsorientierte Übungsaufgaben aus Naturwissenschaft und Technik mit ausführlichen Lösungen. 187 Übungsaufgaben mit Lösungen, 310 Bilder und ein Anhang Physikalische Grundlagen, ISBN 3-528-04355-5, 1990, Vieweg

[9] E.-A. Pforr und W. Schirotzek Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen, Teubner, ISBN 3-8154-2040-7, 1993, Teubner

[10] George Polya *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, Notable Centenary Edition, 2014 (original 1945). ISBN 9-7806-9116-4076

[11] Karl Randall *Improving study habits in mathematics*, The mathematics teacher, 55(7) (1962). Jstor.

[12] Otto Stolz *Ueber die Grenzwerthe der Quotienten*, Mathematische Annalen, 15 (1879) S. 556–559. doi:10.1007/BF02086277.

[13] Karl Weierstrass Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Read in the Royal Academy of Sciences on 18 July 1872. doi:10.1007/978-3-322-91273-2_5

[14] Thomas Westermann Mathematik für Ingenieure. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch, Springer, 8. Aufl., 2020. ISBN 978-3-662-61322-1.